

RAPORT ȘTIINȚIFIC ETAPA 2016

SINTEZA UNOR NOI ALGORITMI DE PROIECTARE CAD A PROFILURILOR SCULELOR AȘCHietoARE, GENERATOARE A SUPRAFETELOR COMPLEXE, CU MIJLOACE NEANALITICE

CONTRACT DE CERCETARE PNII-RU-TE-2014-4-0031/2015

Echipa de cercetare:

Director de proiect:

conf. dr. ing. Virgil Gabriel TEODOR

Cercetători postdoctorali:

ș.l. dr. ing. Nicușor BAROIU

ș.l. dr. ing. Florin SUSAC

Studenti doctoranzi:

drd. ing. Răzvan Tudor ROȘCULEȚ

drd. ing. Mircea NICULESCU

Etapa II

Cuprins

Cuprins	2
I. Sinteza unor algoritmi specifici profilării prin metode neanalitice a sculelor generatoare a suprafețelor elicoidale	3
1.1. Aplicații pentru profilarea sculelor mărginite de suprafețe periferice primare de revoluție	4
1.1.1. Metodă grafică pentru profilarea sculei disc	4
1.1.2. Aplicație. Scula disc pentru canalul elicoidal al burghiului elicoidal	9
1.1.3. Scula cilindro-frontală pentru generarea suprafețelor elicoidale – metoda traiectoriilor relative de generare	13
1.1.4. Scula cilindro-frontală pentru un filet pătrat	19
1.1.5. Scula cilindro-frontală pentru un melc evolventic	23
1.1.6. Profilarea sculelor inelare – metodă grafică în CATIA, bazată pe teorema traiectoriilor plane de generare	26
1.1.7. Profilarea sculei inelare pentru prelucrarea unui filet trapezoidal	30
1.1.8. Scula inelară tangențială – metodă de profilare grafică în mediul CATIA	35
1.2. Profilarea sculei de rabotat pentru generarea suprafețelor elicoidale. Metodă grafică în CATIA	40
1.2.1. Metoda „traiectoriilor plane de generare”	41
1.2.2. Aplicații – Scula cilindrică (scula de rabotat) pentru un melc elicoidal de compresor Roots	45
II. Sinteza unor metodici neanalitice pentru profilarea sculelor care generează prin înfășurare cu contact punctiform	51
2.1. Flancul evolventic al roții dințate	51
2.2. Cremaliera reciproc înfășurătoare familiei de evolvente	53
2.3. Profilarea analitică a sculei melc	55
2.4. Forma suprafeței elicoidale a sculei melc	59
2.5. Concluzii	62
Bibliografie	63

I. Sinteza unor algoritmi specifici profilării prin metode neanalitice a sculelor generatoare a suprafețelor elicoidale

Problematika profilării sculelor mărginite de suprafețe periferice primare de revoluție, generatoare a unor suprafețe elicoidale cilindrice de pas constant (de exemplu: canale elicoidale ale sculelor așchietoare, melci din componenta angrenajelor, șuruburi conducătoare, melci din componenta pompelor elicoidale) a primit soluții analitice în baza teoremelor OLIVIER, teoremei Gohman, condiției Nikolaev, precum și în baza unor teoreme complementare: metoda “distanței minime”; „metoda familiei de cercuri substitutive”.

Totodată, au existat preocupări pentru soluționarea grafică a acestei probleme, precum metoda grafo-analitică, dezvoltată de V. M. Vorobiev, pentru profilarea sculelor disc, generatoare a canalului elicoidal al burghiului elicoidal. Această metodă propune o reprezentare grafică a curbelor secțiunilor plane ale canalului burghiului, cu plane ortogonale axei viitoarei scule și, de aici, a secțiunii axiale a viitoarei scule disc.

Dezvoltarea mediilor de programare grafice, a permis elaborarea unor metode grafice, precum metoda modelului solid, Baicu, I., care crează un model solid al melcului de generat, care, ulterior, rotit în jurul axei viitoarei scule disc, permite determinarea modelului solid al acesteia și, de aici, a secțiunii axiale a sculei, ca bază pentru profilarea sculei generatoare a suprafeței periferice primare de revoluție a sculei disc.

Soluții similare, propun și Veliko, I. și Nankov, G., privind profilarea sculelor generatoare a danturilor evolventice elicoidale.

De asemenea, autorii utilizează modelarea solidă pentru determinarea formei suprafeței efectiv generate cu o sculă disc, al cărei model este determinat.

Utilizând facilitățile mediului de programare CATIA, Berbinschi, S. dezvoltă o metodologie originală de modelare a sculei disc generatoare a unei suprafețe elicoidale cilindrice și de pas constant – metoda proiecției normale a axei sculei disc, în esență, teorema Nikolaev, metodă care se caracterizează prin precizie deosebit de ridicată, intuitivă și ușor de aplicat.

Metodica permite determinarea curbei caracteristice – curba de contact între suprafața de revoluție (scula generatoare) și suprafața elicoidală de generat, eliminându-se incertitudinile privind existența punctelor singulare pe profilurile compuse, precum și a zonelor „umbrite” în poziția relativă a axei sculei față de suprafața de generat.

De asemenea, modelarea grafică 3D a fost utilizată de Guochao Li și alții pentru modelarea generării filetelor cu scule disc. Se modelează contactul cu semifabricatul și se analizează problemele de generare pentru diferitele poziții ale sculei disc în raport cu axa semifabricatului.

În cadrul cercetărilor dezvoltate prin acest proiect se propune o nouă metodologie, dezvoltată în mediul de proiectare grafică CATIA, pentru profilarea sculelor mărginite de suprafețe periferice primare de revoluție și a sculelor cilindrice, generatoare ale unei suprafețe elicoidale cilindrice și de pas constant. Metoda este dezvoltată în baza teoremei complementare a „familiei de traiectorii relative de generare”.

1.1. Aplicații pentru profilarea sculelor mărginite de suprafețe periferice primare de revoluție

1.1.1. Metodă grafică pentru profilarea sculei disc

Se examinează contactul între suprafața elicoidală cilindrică și de pas constant în raport cu suprafața periferică primară a sculei disc (suprafață de revoluție) în plane perpendiculare pe axa sculei disc, figura 1.1.

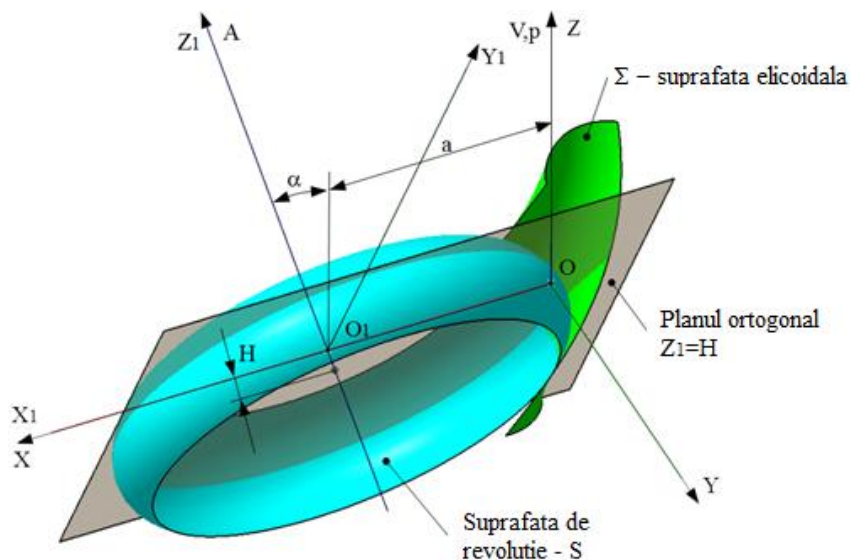


Fig. 1.1. Poziția relativă a axei sculei disc față de suprafața elicoidală (a); sisteme de referință (b); curbele C_Σ și C_S , în contact (c)

Se definesc sistemele de referință:

XYZ este sistemul solidar suprafeței Σ , cu axa Z suprapusă axei \bar{V} a suprafeței elicoidale;

$X_1Y_1Z_1$ – sistem solidar axei viitoare scule disc, axa Z_1 suprapusă axei \bar{A} a suprafeței periferice primare a sculei disc;

a – distanța măsurată pe normala comună între axele Z și Z_1 (mărime constructivă).

Se acceptă că suprafața Σ , în sistemul propriu, XYZ , este descrisă de ecuațiile parametrice principale, în forma:

$$\Sigma \begin{cases} X = X(u, v); \\ Y = Y(u, v); \\ Z = Z(u, v), \end{cases} \quad (1.1)$$

cu u și v parametrii variabili independenți.

Pentru secțiunile plane transversale, $Z_1=H$ (H - variabil), se definește curba aparținând suprafeței Σ , din aceste plane – Σ_H .

Prin transformarea de coordonate:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (1.2)$$

în care unghiul α este determinat din condiția ca axa \vec{A} să fie perpendiculară pe elicea exterioară a suprafeței Σ (elicea aparținând cilindrului de axă \vec{V}) și având diametrul D , figura 1.2.

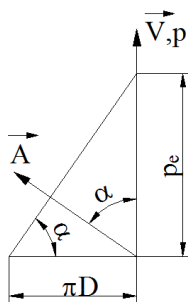


Fig. 1.2. Desfășurata elicei de pe cilindrul de diametrul D

Se definesc:

- unghiul α ,

$$\alpha = \arctg \left[\frac{P_E}{\pi \cdot D} \right]; \quad (1.3)$$

- pasul elicoidal P_E ,

$$P_E = 2\pi \cdot p \quad (1.4)$$

unde p – parametru elicoidal.

Principial, ecuațiile suprafeței Σ în noul sistem $X_1Y_1Z_1$, din (1.1) și (1.2), rezultă principial în forma:

$$\Sigma \begin{cases} X_1 = X_1(u, v); \\ Y_1 = Y_1(u, v); \\ Z_1 = Z_1(u, v). \end{cases} \quad (1.5)$$

care, asociate condiției

$$Z_1 = H \quad (H - \text{variabil}), \quad (1.6)$$

determină curba Σ_H pe suprafața Σ , în forma principială:

$$C_{\Sigma_H} \begin{cases} X_1 = X_1(u); \\ Y_1 = Y_1(u); \\ Z_1 = H. \end{cases} \quad (1.7)$$

Condiția (1.6) reprezintă, în fapt, un loc geometric pe suprafața elicoidală care, algebric, este o dependență între parametrii variabili u și v de tipul:

$$v = v(u). \quad (1.8)$$

Înfășurătorile traiectoriilor relative ale curbelor Σ_H , pentru H – variabil arbitrar, în raport cu sistemul de referință al suprafeței periferice a sculei, determină un loc geometric, care reprezintă suprafața periferică a sculei disc, reciproc înfășurătoare a suprafeței elicoidale Σ . Cinematica procesului de generare presupune realizarea ansamblului de mișcări, figura 1.3:

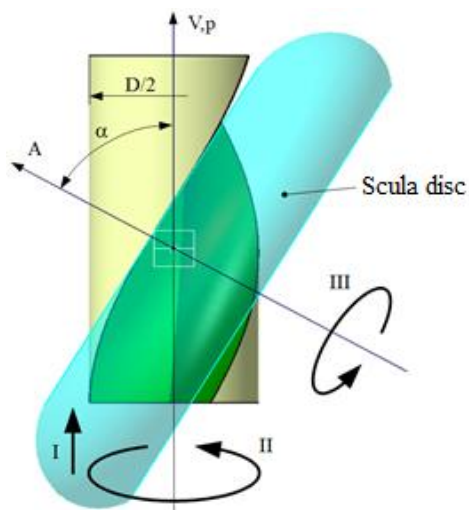


Fig. 1.3. Cinematica generării suprafeței elicoidale

- mișcarea elicoidală a suprafeței Σ (a semifabricatului) de axă de axă \vec{V} și parametru elicoidal p (ansamblul mișcărilor I și II);

- mișcarea de rotație a sculei disc, rotația în jurul axei \vec{A} , ca mișcare de așchiere.

Se definesc traiectoriile relative de generare ca fiind traiectorii ale punctelor aparținând suprafeței elicoidale în raport cu sistemul de referință al viitoarei scule disc în ansamblul de mișcări I, II și III.

Caracteristica suprafeței Σ în ansamblul celor 3 mișcări nu depinde de acea componentă a mișcării în care aceasta se autogenerază. Astfel, deoarece în mișcarea elicoidală de axă \vec{V} și parametru elicoidal p suprafața Σ se autogenerază, caracteristica acesteia va depinde numai de mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} .

Ca urmare, se poate enunța teorema: înfășurătoarea unei suprafețe elicoidale, în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe este înfășurătoarea familiei de traiectorii relative generată în mișcarea de rotație a curbelor ce reprezintă secțiunile plane transversale axei de rotație, ale suprafeței elicoidale.

Astfel, familia de traiectorii relative, descrisă de curbele de tipul (1.7), pentru H – variabilă arbitrară, este descrisă de o transformare de forma:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \omega_3^T(\varphi) \begin{pmatrix} X_1(u) \\ Y_1(u) \\ H \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

cu φ – parametru variabil, în mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} . După dezvoltare, rezultă formele:

$$\begin{pmatrix} C_{\Sigma H} \end{pmatrix}_\varphi \begin{cases} X_1 = X_1(u) \cos \varphi - Y_1(u) \sin \varphi; \\ Y_1 = X_1(u) \sin \varphi + Y_1(u) \cos \varphi; \\ Z_1 = H, \end{cases} \quad (1.10)$$

cu H – variabilă arbitrară.

Înfășurătoarea familiei traiectoriilor relative $(C_{\Sigma H})_\varphi$, pentru H variabil, reprezintă suprafața de revoluție, ce constituie suprafața periferică primară a sculei disc.

Condiția de înfășurare

Se definesc parametrii directori ai normalei la curba C_{Σ_H} , vezi (1.7), care reprezintă o secțiune plană a suprafeței elicoidale de generat, ortogonală axei viitoare suprafețe de revoluție:

$$\vec{n}_{\Sigma_H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{X}_{1_u} & \dot{Y}_{1_u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{Y}_{1_u} \vec{i} - \dot{X}_{1_u} \vec{j}. \quad (1.11)$$

Astfel, normala în punctul curent al curbei Σ_H , vezi (1.7), are ecuațiile parametrice:

$$N_{\Sigma_H} \begin{cases} X_1 = X_1(u) + \lambda \dot{Y}_{1_u}; \\ Y_1 = Y_1(u) - \lambda \dot{X}_{1_u}, \end{cases} \quad (1.12)$$

cu λ parametru scalar variabil.

În mișcarea de rotație a curbei Σ_H (1.7) în jurul axei \vec{A} a suprafeței de revoluție, normala (1.12) descrie o familie de drepte, cu φ – parametrul familiei:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(u) + \lambda \dot{Y}_{1_u} \\ Y_1(u) - \lambda \dot{X}_{1_u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$(N_{\Sigma_H})_{\varphi} \begin{cases} X = [X_{1(u)} + \lambda \dot{Y}_{1_u}] \cos \varphi - [Y_{1(u)} - \lambda \dot{X}_{1_u}] \sin \varphi; \\ Y = [X_{1(u)} + \lambda \dot{Y}_{1_u}] \sin \varphi + [Y_{1(u)} - \lambda \dot{X}_{1_u}] \cos \varphi, \end{cases} \quad (1.14)$$

reprezentând familia normalelor la curbele Σ_H (1.7).

Pentru $\lambda=0$, ecuațiile (1.14) reprezintă familia traiectoriilor relative de generare (1.10).

Condiția ca normala N_{Σ_H} , în mișcarea de rotație a acesteia în jurul axei viitoare suprafețe de revoluție, ce urmează a fi determinată ca înfășurătoare a suprafeței elicoidale Σ , să se confunde, pentru o anumite valoare a parametrului unghiular φ , cu normala unui cerc paralel al suprafeței de revoluție (traiectoria relativă a punctului curent de pe C_{Σ_H}) reprezintă condiția de determinare a unui punct caracteristic, punct comun al suprafeței Σ elicoidală și S de revoluție (suprafața primară a sculei disc), punct în care cele două curbe C_{Σ_H} și C_{S_H} admit normala comună.

Ansamblul acestor puncte, pentru H – variabil, reprezintă un loc geometric pe suprafața Σ – curba caracteristică, comună suprafețelor S și Σ .

Condiția impusă se reduce la condiția ca familia $(N_{\Sigma})_{\varphi}$ să intersecteze axa de rotație \vec{A} , în planul $Z_1=H$, adică să treacă prin punctul P , de coordonate:

$$P \begin{cases} X_1 = 0; \\ Y_1 = 0; \\ Z_1 = H. \end{cases} \quad (1.15)$$

Deci, din (1.14) și (1.15) se deduc condițiile:

$$\begin{cases} \left[X_{1(u)} + \lambda \dot{Y}_{1u} \right] \cos \varphi - \left[Y_{1(u)} - \lambda \dot{X}_{1u} \right] \sin \varphi = 0; \\ \left[X_{1(u)} + \lambda \dot{Y}_{1u} \right] \sin \varphi + \left[Y_{1(u)} - \lambda \dot{X}_{1u} \right] \cos \varphi = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

din care, eliminând punctul λ , se deduce condiția de înfășurare specifică metodei traiectoriilor relative de generare:

$$\frac{-X_{1(u)} \cos \varphi + Y_{1(u)} \sin \varphi}{\dot{Y}_{1u} \cos \varphi + \dot{X}_{1u} \sin \varphi} = \frac{-X_{1(u)} \sin \varphi - Y_{1(u)} \cos \varphi}{\dot{Y}_{1u} \sin \varphi - \dot{X}_{1u} \cos \varphi}, \quad (1.17)$$

care, principal, se reduce la o dependență între u și φ , de forma:

$$u = u(\varphi). \quad (1.18)$$

Ansamblul de ecuații (1.10) și (1.18) reprezintă, în sistemul $X_I Y_I Z_I$, pentru H – variabilă arbitrară, curba caracteristică de contact între suprafața elicoidală Σ – suprafață elicoidală cilindrică și de pas constant și suprafața periferică primară de revoluție a sculei disc – suprafața S .

Condiția (1.17) se poate reduce la forma:

$$X_{1(u)} \dot{X}_{1u} + Y_{1(u)} \dot{Y}_{1u} = 0 \quad (1.19)$$

pentru H – variabil.

Pentru H – variabil între limite definite constructiv de forma și dimensiunile suprafeței Σ , fie H_{\min} și H_{\max} , vezi figura 1. Ansamblul de ecuații (1.10) și (1.19) reprezintă coordonate ale punctelor de pe curba caracteristică pe suprafața Σ , principal în forma unei matrice:

$$C_{\Sigma} = \begin{pmatrix} X_{11} & Y_{11} & H_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1i} & Y_{1i} & H_i \\ X_{1n} & Y_{1n} & H_n \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

în care X_{1i} , Y_{1i} sunt coordonate ale punctului curent de pe curba caracteristică.

Prin rotirea curbei caracteristice (1.20) în jurul axei \bar{A} , vezi figura 1, se determină suprafața periferică de revoluție a sculei disc:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ H_i \end{pmatrix}_{i=1,2,\dots,n}, \quad (1.21)$$

cu θ parametru unghiular, în mișcarea de rotație în jurul axei \bar{A} (Z_I), vezi figura 1.

Se determină secțiunea axială a sculei disc în sistemul (R,H) din (1.21) prin ecuațiile:

$$S_A \begin{cases} R = \sqrt{X_{1i}^2 + Y_{1i}^2}; \\ H = H_{ix}, \end{cases} \quad (1.22)$$

cu $i=1, \dots, n$, în funcție de forma și dimensiunile suprafeței elicoidale generate, vezi figura 1.4.

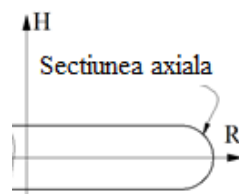


Fig. 1.4. Secțiunea axială a sculei disc

1.1.2. Aplicație. Scula disc pentru canalul elicoidal al burghiului elicoidal

Canalul elicoidal al burghiului este o suprafață elicoidală cilindrică și de pas constant compusă, vezi figura 1.5, care, într-o formă simplificată, este formată dintr-o suprafață elicoidală riglată, de generatoare \overline{AB} și o suprafață elicoidală cu generatoare curbă, arcul \widehat{BC} , figura 1.5, canalul de evacuare a așchiilor.

Se definește sistemul XYZ , cu axa Z suprapusă axei burghiului în care se definesc generatoarele canalului elicoidal (zonele AB și BC) și ulterior – suprafața elicoidală compusă.

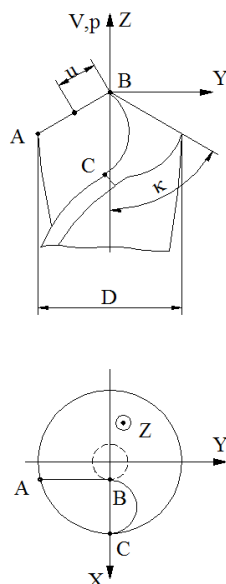


Fig. 1.5. Suprafața elicoidală compusă a canalului elicoidal al burghiului

- Generatoarea AB

În sistemul XYZ , generatoarea AB are ecuațiile:

$$\begin{cases} X = -u \sin \chi; \\ Y = \frac{d_0}{2}; \\ Z = u \cos \chi, \end{cases} \quad (1.23)$$

cu u – parametru variabil, între limitele:

$$u_{\min} = 0; \quad u_{\max} = \sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{d_0^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sin \chi}, \quad (1.24)$$

în care d_0 este diametrul miezului burghiului (mărimă constructivă).

Astfel, suprafața elicoidală de axă $\vec{V}(Z)$ și parametru elicoidal p are ecuațiile:

$$\Sigma_{AB} \begin{cases} X = -u \sin \chi \cdot \cos v - \frac{d_0}{2} \sin v; \\ Y = -u \sin \chi \cdot \sin v - \frac{d_0}{2} \cos v; \\ Z = u \cos \chi + pv. \end{cases} \quad (1.25)$$

Suprafața elicoidală Σ_{AB} este o suprafață elicoidală cilindrică de pas constant, de parametru elicoidal p ,

$$p = \frac{D}{2tg\omega}, \quad (1.26)$$

în care D este diametrul burghiului.

Condiția de înfășurare specifică, vezi (1.19), presupune cunoașterea ecuațiilor suprafeței în sistemul de referință al sculei disc, vezi figura 1 și transformarea (1.2).

Din (1.25) și (1.2), rezultă ecuațiile parametriche ale suprafeței elicoidale riglate în sistemul de referință $X_1Y_1Z_1$, pentru zona AB :

$$\Sigma_{AB} \begin{cases} X_1 = -u \sin \chi \cdot \cos v - \frac{d_0}{2} \sin v - a; \\ Y_1 = \left[-u \sin \chi \cdot \sin v - \frac{d_0}{2} \cos v \right] \cos \alpha + [u \cos \chi + pv] \sin \alpha; \\ Z_1 = - \left[-u \sin \chi \cdot \sin v - \frac{d_0}{2} \cos v \right] \sin \alpha + [u \cos \chi + pv] \cos \alpha. \end{cases} \quad (1.27)$$

Se determină curba C_{Σ_H} din condiția de intersecție a suprafeței $\Sigma(1.27)$ cu planul

$$Z_1 = H. \quad (1.28)$$

Astfel, din (1.27) și (1.28), rezultă:

$$- \left[-u \sin \chi \cdot \sin v - \frac{d_0}{2} \cos v \right] \sin \alpha + [u \cos \chi + pv] \cos \alpha = H, \quad (1.29)$$

de unde, rezultă:

$$u = \frac{H - \frac{d_0}{2} \cos v \cdot \sin \alpha - pv \cdot \cos \alpha}{\sin \chi \cdot \sin v \cdot \sin \alpha + \cos \chi \cdot \cos \alpha}. \quad (1.30)$$

Se definește derivata:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\left[\frac{d_0}{2} \sin v \cdot \sin \alpha - p \cos \alpha \right] \cdot [\sin \chi \cdot \sin v \cdot \sin \alpha + \cos \chi \cdot \cos \alpha] - \left[\sin \chi \cdot \cos v \cdot \sin \alpha \right] \cdot \left[H - \frac{d_0}{2} \cos v \cdot \sin \alpha - pv \cdot \cos \alpha \right]}{(\sin v \cdot \sin \chi \cdot \sin \alpha + \cos \chi \cdot \cos \alpha)^2} \quad (1.31)$$

Se definesc derivatele parțiale, din (1.27):

$$\begin{aligned} \dot{X}_{1u} &= -\frac{du}{dv} \sin \chi \cos v + u \sin \chi \sin v - \frac{d_0}{2} \cos v \\ \dot{Y}_{1u} &= \left[-\frac{du}{dv} \sin \chi \sin v - u \sin \chi \cos v + \frac{d_0}{2} \sin v \right] \cos \alpha + \\ &+ \left[\frac{du}{dv} \cos \chi + p \right] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{A(u, v)}{B^2(u, v)}, \quad (1.33)$$

în care:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \left[\frac{d_0}{2} \sin v \cdot \sin \alpha - p \cos \alpha \right] \cdot [\sin \chi \cdot \sin v \cdot \sin \alpha + \cos \chi \cdot \cos \alpha] - \\ &- \left[H - \frac{d_0}{2} \cos v \cdot \sin \alpha - pv \cdot \cos \alpha \right] \sin \chi \cos v \sin \alpha; \\ B(u, v) &= \sin v \cdot \sin \chi \cdot \sin \alpha + \cos \chi \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.34)$$

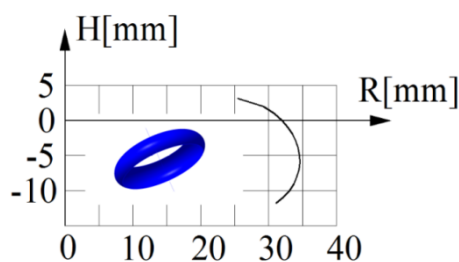
Se propune o rezolvare pentru determinarea condiției de înfășurare din (1.18), în care $X_1(u)$, $Y_1(u)$, \dot{X}_{1u} , \dot{Y}_{1u} sunt definite din (1.27), (1.30)...(1.34).

Pentru un caz concret, se dau: $D = 20$ mm; $d_0 = 2,5$ mm; $\chi = 60^\circ$; $a = 150$ mm; $p = 17,32$ mm; $\alpha = 60^\circ$; $R_0 = 20$ mm.

În tabelul 2.1, sunt prezentate coordonatele curbei caracteristice, precum și secțiunea axială a sculei disc.

Tabelul 1.1. Coordonatele punctelor de pe secțiunea axială și de pe curba caracteristică

Nr. crt.	X ₁ [mm]	Y ₁ [mm]	Z ₁ [mm]	R [mm]	H [mm]
segmentul AB					
1	-25.441	-0.992	3.113	25.460	3.113
2	-28.866	-4.470	2.000	29.210	2.000
3	-30.403	-5.149	1.000	30.836	1.000
4	-31.512	-5.406	0.000	31.972	0.000
5	-32.355	-5.716	-1.000	32.856	-1.000
6	-33.002	-5.844	-2.000	33.515	-2.000
7	-33.491	-5.922	-3.000	34.011	-3.000
8	-33.821	-5.957	-3.920	34.342	-3.920
arcul BC					
1	-33.831	-5.954	-3.950	34.351	-3.950
2	-33.850	-5.933	-4.000	34.366	-4.000
3	-34.122	-5.512	-5.000	34.564	-5.000
4	-34.222	-5.095	-6.000	34.599	-6.000
5	-34.159	-4.672	-7.000	34.477	-7.000
6	-33.929	-4.236	-8.000	34.192	-8.000
7	-33.521	-3.774	-9.000	33.733	-9.000
8	-32.902	-3.263	-10.000	33.063	-10.000
9	-32.010	-2.645	-11.000	32.119	-11.000
10	-31.419	-2.244	-11.500	31.499	-11.500
11	-31.073	-1.994	-11.750	31.137	-11.750

**Fig. 1.6.** Secțiunea axială a sculei disc**Metoda grafică în CATIA**

Metoda grafică propusă presupune parcurgerea următorului algoritm.

În modulul *Generative Shape Design* se generează cele două sisteme de referință prezentate în figura 1.1.

Unghiul între axa sculei și axa suprafeței elicoidale poate fi stabilit ca parametru unghiular și poate fi calculat ca funcție de parametrul elicoidal și de diametrul elicei directoare a suprafeței Σ .

În sistemul de referință *XYZ* se definește elicea cilindrică de pas constant. Această elice este curbă directoare a suprafeței elicoidale.

În planul *XY* al sistemului de referință se construiește profilul compus. Acest profil definește secțiunea transversală a burghiului elicoidal.

Cu ajutorul comenzii *SWEEP* se generează canalul elicoidal având ca directoare elicea cilindrică de pas constant și ca generatoare profilul compozit al canalului.

Se definește un parametru tip lungime, H . Acest parametru va controla poziția planului $Z_I = H$. Modificând valoarea parametrului H se poate schimba cu ușurință poziția planului în care este studiat contactul între suprafața elicoidală și cea de revoluție.

Se construiește un plan paralel cu planul $X_I Y_I$, la distanță H de acesta. Intersectând acest plan cu suprafața elicoidală se obține o curbă plană, Σ_H .

Se generează un punct ca intersecție între planul $Z_I = H$ și axa Z_I .

În planul $Z_I = H$ se desenează o schiță compusă din două segmente de dreaptă. Primul segment este constrâns să aibă un capăt pe curba Σ_H și celălalt capăt în punctul de intersecție dintre planul H și axa Z_I .

Al doilea segment este constrâns să aibă mijlocul pe capătul primului segment care aparține curbei plane. Ulterior, între cele două segmente se adaugă o restricție de tip perpendicularitate.

Astfel se determină punctul de pe curba plană, în care normala la această curbă intersectează axa sculei.

Se determină intersecția între suprafața elicoidală și punctul de capăt al primului segment desenat în schița precedentă.

Acest punct de intersecție este reținut cu comanda *ISOLATE* și se trece la determinarea unui alt punct de pe curba caracteristică, pentru o nouă valoare a parametrului H .

Astfel, se determină o formă discretă a curbei caracteristice, determinând un număr suficient de mare de puncte pe ea.

În tabelul 1.1 sunt prezentate coordonatele punctelor de pe curba caracteristică și a celor de pe secțiunea axială a sculei disc.

1.1.3. Scula cilindro-frontală pentru generarea suprafețelor elicoidale– metoda traiectoriilor relative de generare

Profilarea sculelor, mărginite de suprafețe periferice primare de revoluție, pentru generarea suprafețelor elicoidale cilindrice de pas constant (roți dințate elicoidale, șuruburi ale pompelor elicoidale, rotoare de compresor elicoidal, șuruburi de mișcare cu multe începuturi), se realizează apelând la principiile fundamentale ale înfășurării suprafețelor – teorema Olivier sau teorema Gohman. De asemenea, pentru această situație specifică a generării suprafețelor elicoidale cu scule mărginite de suprafețe de revoluție se pot utiliza teoreme specifice precum teorema NIKOLAEV sau teoremele complementare: „familia de cercuri de substituie”; „distanța minimă”.

Totodată, dezvoltarea mediilor grafice de proiectare precum AutoCAD, CATIA și altele au permis abordarea acestei problematice a determinării formei suprafețelor de revoluție reciproc înfășurătoare prin mijloace grafice.

Problematice generării suprafețelor elicoidale cu scule mărginite de suprafețe de revoluție – scula disc, scula cilindro-frontală, scule inelare, este o problemă actuală ilustrată de cercetări și publicații recente.

În cele ce urmează, se propune o soluționare a profilării sculei cilindro-frontale, sculă mărginită de o suprafață periferică primară de revoluție, în baza cunoașterii traiectoriilor relative între suprafața de generat și suprafața periferică a viitoarei scule, într-o exprimare analitică și, totodată, grafică – metoda traiectoriilor relative de generare.

Având în vedere specificul generării cu scula cilindro-frontală, sculă mărginită de o suprafață de revoluție, problema poate fi simplificată, analizând contactul între cele două suprafețe conjugate - suprafața elicoidală cilindrică de pas constant și suprafața de

revoluție, ca o problemă plană, în secțiuni plane ortogonale axei suprafeței de revoluție - suprafața periferică a sculei cilindro-frontale, figura 2.1.

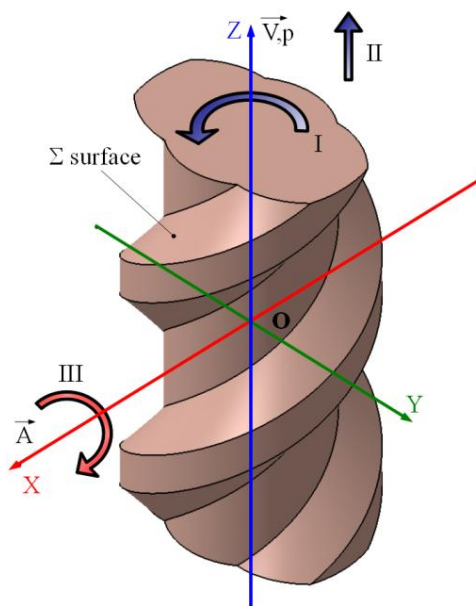


Fig. 2.1. Poziția axei sculei cilindro-frontale în raport cu suprafața elicoidală

Cinematica procesului de generare presupune mișcările:

I – rotația suprafeței elicoidale în jurul axei proprii, axa \vec{V} ;

II – translația suprafeței elicoidale în lungul axei proprii, coordonată cu mișcarea de rotație *I*, astfel încât să genereze un elicoid de parametru p , identic cu elicoidul căruiua îi aparține suprafața elicoidală Σ ;

III – mișcarea de rotație a sculei cilindro-frontale în jurul axei proprii, axa \vec{A} .

În ansamblul de mișcări *I* și *II*, suprafața elicoidală Σ , ca suprafață elicoidală cilindrică de pas constant de axa \vec{V} și parametrul elicoidal „ p ”, se autogenerază. Caracteristica suprafeței Σ în ansamblul mișcărilor *I*, *II* și *III*, nu depinde de acea componentă a mișcării în decursul căreia aceasta se autogenerază.

Astfel, caracteristica suprafeței Σ va fi determinată numai în mișcarea de rotație a acesteia, în jurul axei viitoare scule cilindro-frontale, axa \vec{A} . În planul transversal H , figura 2.1, cercul paralel al suprafeței de revoluție rezultă ca înfășurătoare a familiei de traiectorii – familia curbelor C_{Σ_H} , în mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} .

Metoda familiei de traiectorii relative de generare

În figura 2.2, sunt prezentate sistemele de referință solidare cu suprafața elicoidală de generat modelul suprafeței elicoidale Σ și planul ortogonal axei viitoare suprafețe de revoluție – suprafața periferică primară a sculei cilindro-frontale.

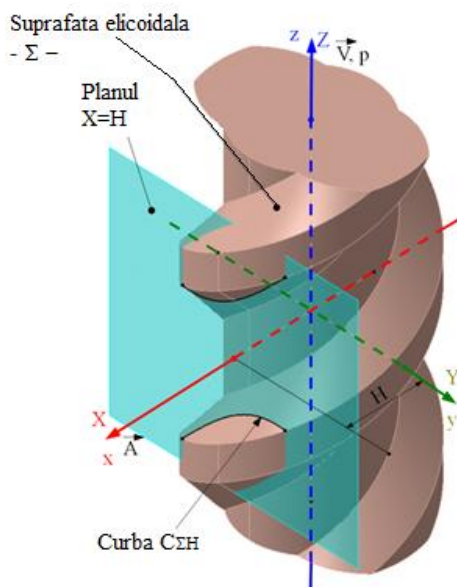


Fig.2.2. Suprafața elicoidală Σ , planul $X=H$; sisteme de referință

Se definesc:

xyz este sistemul de referință fix, axa x este suprapusă axei \bar{A} a viitoarei scule cilindro-frontale; axa \bar{A} este incidentă axei z , axa suprafeței elicoidale Σ .

XYZ este sistemul mobil solidar axei suprafeței elicoidale, axa \bar{V} și parametrul elicoidal p , suprapusă axei Z , în poziția inițială, suprapus sistemului xyz .

Cu $x^*y^*z^*$ s-a notat poziția sistemului XYZ , după rotația de unghi ν , în jurul axei X (vezi figura 2).

Dacă se acceptă ca suprafața elicoidală admite o generatoare definită ca fiind:

$$G \begin{cases} X = X(u); \\ Y = Y(u); \\ Z = Z(u), \end{cases} \quad (2.1)$$

cu u parametru variabil, în mișcarea elicoidală a acesteia în jurul axei \bar{V} (Z), de parametru elicoidal p ,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \\ Z(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \cdot \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

melc dreapta, rezultă forma parametrică a ecuațiilor suprafeței elicoidale, în sistemul XYZ :

$$\Sigma \begin{cases} X = X(u) \cos \varphi - Y(u) \sin \varphi; \\ Y = Y(u) \sin \varphi + X(u) \cos \varphi; \\ Z = Z(u) + p \cdot \varphi, \end{cases} \quad (2.3)$$

cu φ – parametrul unghiular, la rotația în jurul axei Z .

Se cunoaște planul ortogonal axei \bar{A} , a viitoarei scule cilindro-frontale:

$$X = H \quad (H \text{ variabilă arbitrară}), \quad (2.4)$$

sau din (2.3):

$$X(u)\cos\varphi - Y(u)\sin\varphi = H. \quad (2.5)$$

Condiția (2.5) este, principal, echivalentă cu forma:

$$\varphi = \varphi(u, H). \quad (2.6)$$

Ansamblul ecuațiilor (2.3) și (2.6) definesc, pe suprafața elicoidală, o curbă plană - C_{Σ_H} .

Principal, curba C_{Σ_H} se va exprima prin ecuații de forma:

$$C_{\Sigma H} \begin{cases} X = H; \\ Y = Y(u); \\ Z = Z(u), \end{cases} \quad (2.7)$$

Curbele C_{Σ_H} , din diferitele plane $X=H$, în mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} , vor descrie o familie de traiectorii de generare, a căror înfășurătoare este suprafața periferică primară a sculei cilindro-frontale.

Metoda traiectoriilor plane de generare se bazează pe o definiție și, totodată, o teoremă specifică, precum urmează:

Definiție

Se definesc traiectoriile relative de generare ca fiind traiectoriile generate în mișcarea de rotație în jurul axei suprafeței de revoluție conjugate a punctelor aparținând curbelor de pe suprafața elicoidală, din secțiunile plane, ortogonale axei suprafeței de revoluție conjugate.

Teorema

Suprafața de revoluție conjugată unei suprafețe elicoidale cilindrică și de pas constant este locul geometric al înfășurătoarei traiectoriilor de generare, în mișcarea de rotație în jurul axei suprafeței de revoluție.

Condiția de înfășurare

Determinarea condiției de înfășurare specifice problemei de generare propuse, presupune determinarea normalei la curbele C_{Σ_H} , ai cărei parametri directori, sunt determinați de:

$$\vec{N}_{C_{\Sigma H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \dot{Y}_u & \dot{Z}_u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

sau

$$\vec{N}_{C_{\Sigma H}} = \dot{Z}_u \cdot \vec{j} - \dot{Y}_u \cdot \vec{k}. \quad (2.9)$$

Forma (2.9) reprezintă un vector având direcția versorului normalei la curba C_{Σ_H} , în sistemul XYZ.

Dreapta suport a normalei la curba C_{Σ_H} are ecuații de forma:

$$N_{C_{\Sigma H}} \begin{cases} X = H; \\ Y = Y(u) + \lambda \cdot \dot{Z}_u; \\ Z = Z(u) - \lambda \cdot \dot{Y}_u, \end{cases} \quad (2.10)$$

cu λ parametru scalar variabil.

Se pot determina, acum, familia dreptelor $N_{C_{\Sigma H}}$, în mișcarea de rotație a acestora în jurul axei \bar{A} (axa sculei cilindro-frontale):

$$(N_{C_{\Sigma H}})_v : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H \\ Y(u) + \lambda \cdot \dot{Z}_u \\ Z(u) - \lambda \cdot \dot{Y}_u \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

sau, după dezvoltări:

$$(N_{C_{\Sigma H}}) \begin{cases} x = H; \\ y = [Y(u) + \lambda \cdot \dot{Z}_u] \cdot \cos v - [Z(u) - \lambda \cdot \dot{Y}_u] \cdot \sin v; \\ z = [Y(u) + \lambda \cdot \dot{Z}_u] \cdot \sin v + [Z(u) - \lambda \cdot \dot{Y}_u] \cdot \cos v. \end{cases} \quad (2.12)$$

cu v parametru unghiular de rotație în jurul axei x .

Ecuțiile (2.12) reprezintă familia normalelor la $C_{\Sigma H}$, generată în mișcarea de rotație în jurul axei \bar{A} .

Din condiția ca normalele la curbele $C_{\Sigma H}$ să fie identice cu normalele la viitoarea suprafață periferică de revoluție a sculei cilindro-frontale, se impune condiția ca familia normalelor (2.12) să intersecteze axa \bar{A} , axa suprafețelor de revoluție.

Ecuția axei \bar{A} poate fi descrisă, în sistemul xyz de forma:

$$\begin{cases} x = H; \\ y = 0; \\ z = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

cu H variabilă scalară măsurată în lungul axei x .

Ca urmare, din (2.12) și (2.13), rezultă condițiile:

$$\begin{cases} [Y(u) + \lambda \cdot \dot{Z}_u] \cdot \cos v - [Z(u) - \lambda \cdot \dot{Y}_u] \cdot \sin v = 0; \\ [Y(u) + \lambda \cdot \dot{Z}_u] \cdot \sin v + [Z(u) - \lambda \cdot \dot{Y}_u] \cdot \cos v = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

din care, prin eliminarea parametrului λ , rezultă condiția de înfășurare specifică:

$$Y(u) \cdot \dot{Y}_u + Z(u) \cdot \dot{Z}_u = 0. \quad (2.15)$$

Principial, condiția (2.15) reprezintă o legătură algebrică între parametrii u și v , definind un loc geometric pe suprafața Σ - loc geometric care semnifică curba caracteristică a suprafeței Σ în ansamblul de mișcări I, II și III , vezi figura 1.

Reiterăm observația că, în mișcarea compusă $I - II$, numai componenta referitoare la rotația în jurul axei sculei cilindro-frontale influențează forma curbei caracteristice.

Facem observația că din (2.12), pentru $\lambda=0$, se determină familia curbelor C_Σ în mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} - axa sculei cilindro-frontale, familia de traiectorii relative de generare:

$$(C_\Sigma)_v \begin{cases} x = H; \\ y = Y(u) \cdot \cos v - Z(u) \cdot \sin v; \\ z = Y(u) \cdot \sin v + Z(u) \cdot \cos v, \end{cases} \quad (2.16)$$

care, reunite condiției (2.15), reprezintă caracteristica (curba de contact) între Σ - suprafața elicoidală de generat și S - suprafața de revoluție de axă \vec{A} .

Suprafața axială suprafeței S

Condiția de înfășurare (2.15) reprezintă, în final, o legătură între parametrii variabili, u și v , de tipul:

$$v = v(u), \quad (2.17)$$

astfel că, principial, ecuațiile (2.16) sunt forme analitice care depind de un singur parametru:

$$C_S \begin{cases} x = H; \\ y = Y(u); \\ z = Z(u), \end{cases} \quad (2.18)$$

curba C_S fiind o curbă ce aparține suprafeței S , figura 2.3.

Secțiunea axială se exprimă prin:

$$S_A \begin{cases} H = x; \\ R = \sqrt{Y^2(u) + Z^2(u)}. \end{cases} \quad (2.19)$$

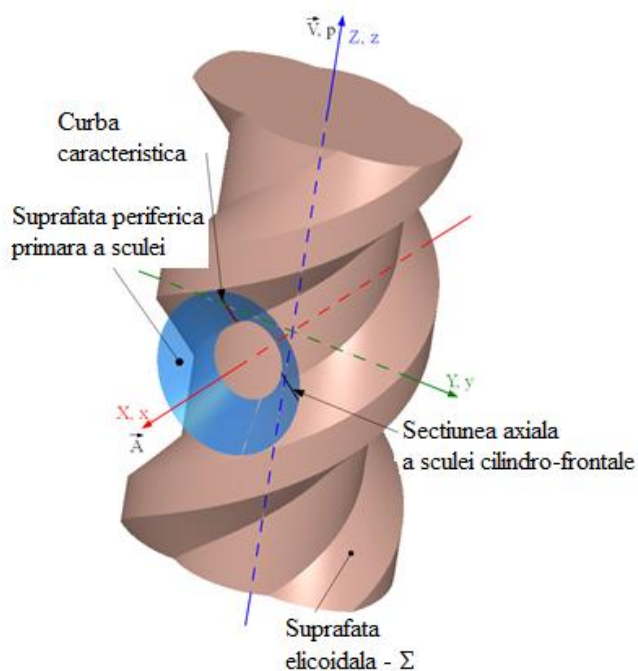


Fig.2.3. Curba caracteristică și secțiunea axială a sculei cilindro-frontale

1.1.4. Scula cilindro-frontală pentru un filet pătrat

Se propune un exemplu de aplicare a metodei traiectoriilor relative de generare, pentru profilarea sculei cilindro-frontale care generează un melc cu flancuri rectilinii, cu multe începuturi. Astfel de șuruburi se utilizează ca organe de acționare a culisoului a unor prese mecanice.

În figura 2.4, se prezintă sistemul de referință față de care este raportat melcul, precum și generatoarele frontale ale flancurilor elicoidale – segmente de dreaptă în plane ortogonale axei melcului de generat.

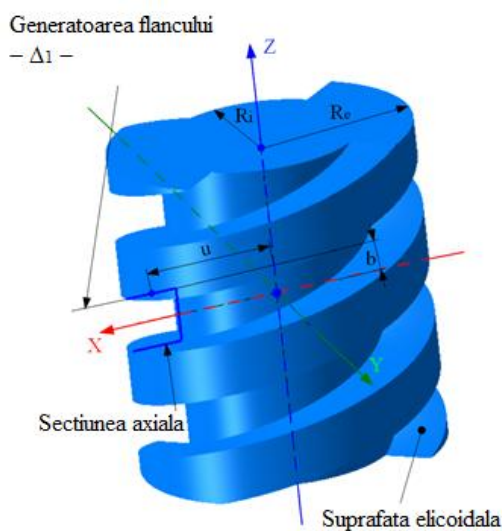


Fig.2.4. Suprafața elicoidală. Șurubul cu k începuturi, generatoarea flancului, Δ_1
 Generatoarea flancului elicoidal este dată de:

$$\Delta_I \begin{cases} X = u; \\ Y = 0; \\ Z = b, \end{cases} \quad (2.20)$$

cu $u_{min} = R_i$; $u_{max} = R_e$ valori constructive.

Suprafața elicoidală Σ , elicoid de axa \vec{V} și parametru p are ecuațiile:

$$\Sigma \begin{cases} X = u \cdot \cos \varphi; \\ Y = u \cdot \sin \varphi; \\ Z = b + p \cdot \varphi. \end{cases} \quad (2.21)$$

melc dreapta.

Curba C_{Σ} , din planul

$$X = H \quad (H \text{ variabil între limitele } H_{min}=R_i \text{ și } H_{max}=R_e). \quad (2.22)$$

Din (2.21) și (2.22) rezultă:

$$u = \frac{H}{\cos \varphi}. \quad (2.23)$$

Astfel, curbele $C_{\Sigma H}$, vezi și (2.7), au forma:

$$C_{\Sigma H} \begin{cases} X = H; \\ Y = \frac{H \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi}; \\ Z = b + p \cdot \varphi. \end{cases} \quad (2.24)$$

Pentru calculul condiției de înfășurare (2.15) se definesc derivatele din (2.24):

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\varphi} &= \frac{H}{\cos^2 \varphi}; \\ \dot{Z}_{\varphi} &= p. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ansamblul ecuațiilor de tipul (2.16):

$$\begin{aligned} X &= H; \\ Y &= Y(\varphi) \cdot \cos v - Z(\varphi) \cdot \sin v; \\ Z &= Y(\varphi) \cdot \sin v + Z(\varphi) \cdot \cos v, \end{aligned} \quad (2.26)$$

cu $Y(\varphi)$, $Z(\varphi)$ dată de (2.24) și condiția (2.15), calculată pentru derivatele (2.25), reprezintă suprafața periferică primară a sculei cilindro-frontale.

Se prezintă o aplicație numerică pentru profilarea sculei cilindro-frontale destinată generării unui melc (șurub) având caracteristicile:

$R_e=60$ mm;

$R_i=40$ mm;

Număr de începături, $k=2$;

$b=20$ mm;

Este propusă o soluție dezvoltată în mediul de proiectare CATIA. Se modelează suprafața Σ și, cunoscându-se poziția viitoarei scule cilindro-frontale se definesc planele perpendiculare pe axa acesteia.

Intersectând (cu comanda *INTERSECTION*) aceste plane cu modelul 3D al suprafeței elicoidale Σ se determină curbele C_{Σ} .

Familia de traiectorii de generare în planele $H = X$ este obținută rotind curba C_{Σ} în jurul axei sculei, vezi figura 2.5.

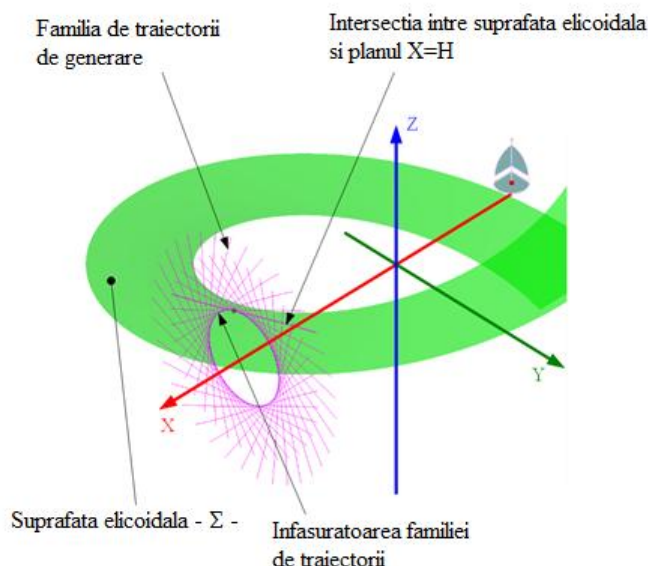


Fig. 2.5. Intersecția între suprafața elicoidală și planele axiale; familia de curbe C_{Σ} ; familia de înfășurătoare

Ulterior, se construiește un cerc tangent la familia de curbe. Acest cerc reprezintă un cerc paralel al suprafeței de revoluție (suprafața periferică primară a sculei cilindro-frontale), vezi figura 2.6.

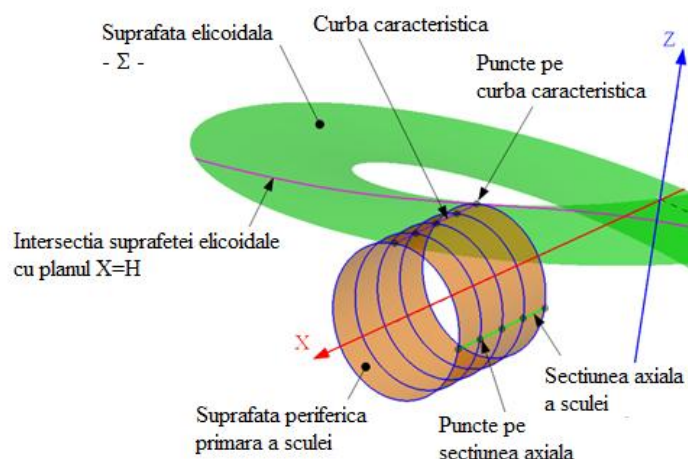


Fig. 2.6. Suprafața periferică primară a sculei; curba caracteristică; secțiunea axială

Intersecția acestui cerc cu C_{Σ} , obținută cu comanda *INTERSECTION*, reprezintă un punct de pe curba caracteristică. Această curbă este comună atât suprafeței elicoidale a semifabricatului cât și suprafeței de revoluție a sculei.

Prin rotirea curbei caracteristice (comanda *REVOLVE*) în jurul axei X se generează suprafața S . Secțiunea cu un plan axial (comanda *INTERSECTION*) determină forma secțiunii axiale și permite măsurarea coordonatelor punctelor care aparțin acestei secțiuni (comanda *MEASURE*).

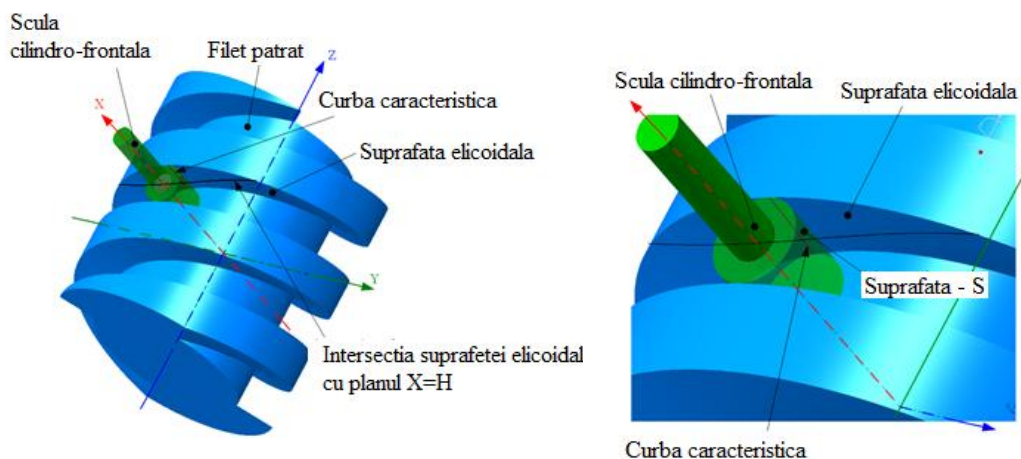


Fig. 2.7. Poziția de lucru a sculei; curba caracteristică

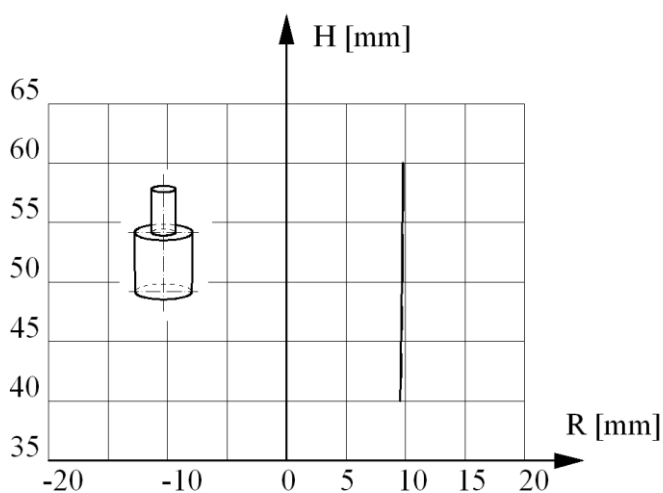


Fig. 2.8. Secțiunea axială a sculei cilindro-frontale

În figura 2.8 și tabelul 2.2, sunt prezentate forma și coordonatele secțiunii axiale ale sculei cilindro-frontale, iar în tabelul 2.1 coordonatele punctelor de pe curba caracteristică.

Tabelul 2.1. Coordonatele punctelor de pe curba caracteristică

X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	Error
60.000	-2.029	9.570	0.000
58.000	-2.029	9.514	0.003
56.000	-2.159	9.509	0.004
54.000	-2.230	9.474	0.005
52.000	-2.306	9.436	0.005
50.000	-2.386	9.393	0.006
48.000	-2.472	9.345	0.007
46.000	-2.564	9.291	0.009
44.000	-2.661	9.231	0.010
42.000	-2.766	9.163	0.012
40.000	-2.877	9.086	0.015

Tabelul 2.2 Coordonatele punctelor de pe secțiunea axială

R [mm]	H [mm]
60.000	9.783
58.000	9.754
56.000	9.751
54.000	9.733
52.000	9.714
50.000	9.691
48.000	9.666
46.000	9.638
44.000	9.607
42.000	9.571
40.000	9.531

1.1.5. Scula cilindro-frontală pentru un melc evolventic

Este cunoscută definiția melcului evolventic, ca suprafață riglată. În figura 2.9, sunt prezentate sistemele de referință, dreapta generatoare și cercul de rază R_b , care definesc secțiunea transversală a cilindrului de bază.

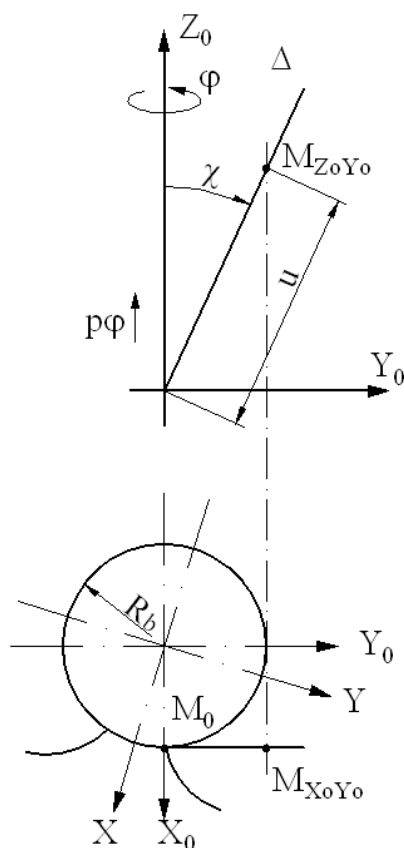


Fig. 2.9. Generatoarea melcului evolventic

Se definește generatoarea melcului evolventic, dreapta Δ , tangentă la cilindrul de rază R_b și totodată la elicea descrisă de punctul de tangență al acesteia pe cilindrul de rază R_b :

$$\Delta \begin{cases} X_0 = R_b; \\ Y_0 = u \cdot \sin \chi; \\ Z_0 = u \cdot \cos \chi. \end{cases} \quad (2.27)$$

În mișcarea elicoidală \vec{V} și p (\vec{V} suprapus axei Z_0) melc, dreapta de parametru elicoidal, p :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_b \\ u \cdot \sin \chi \\ u \cdot \cos \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \cdot \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

pentru φ – parametru variabil se generează o suprafață riglată:

$$(\Delta) \begin{cases} X_0 = R_b \cdot \cos \varphi - u \cdot \sin \chi \cdot \sin \varphi; \\ Y_0 = R_b \cdot \sin \varphi + u \cdot \sin \chi \cdot \cos \varphi; \\ Z_0 = u \cdot \cos \chi + p \cdot \varphi, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{R_b}{p}. \quad (2.30)$$

Pentru un melc cu k începuturi, se raportează ecuațiile (2.29) la un nou sistem de referință, vezi figura 8, XYZ ; δ este semiunghiul golului, axa X fiind axa de simetrie a golului între două flancuri antiomoloage ale aceluiași gol:

$$\delta = \frac{m \cdot \pi}{4} \cdot \frac{2}{m \cdot k} = \frac{\pi}{2 \cdot k}. \quad (2.31)$$

Astfel, prin transformare de coordonate:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

se transferă ecuațiile (2.29) la sistemul de referință cu axa X – axa de simetrie a golului,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_b \cdot \cos \varphi - u \cdot \sin \chi \cdot \sin \varphi \\ R_b \cdot \sin \varphi + u \cdot \sin \chi \cdot \cos \varphi \\ u \cdot \cos \chi + p \cdot \varphi \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

sau

$$\Sigma = (\Delta)_\varphi \begin{cases} X = R_b \cdot \cos(\delta + \varphi) - u \cdot \sin \chi \cdot \sin(\delta + \varphi); \\ Y = R_b \cdot \sin(\delta + \varphi) + u \cdot \sin \chi \cdot \cos(\delta + \varphi); \\ Z = u \cdot \cos \chi + p \cdot \varphi. \end{cases} \quad (2.34)$$

Curba C_{Σ_H} - vezi (2.7) se deduce din condiția:

$$H = R_b \cdot \cos(\delta + \varphi) - u \cdot \sin \chi \cdot \sin(\delta + \varphi) \quad (2.35)$$

sau, altfel,

$$u = \frac{[R_b \cdot \cos(\delta + \varphi) - H]}{\sin \chi \cdot \sin(\delta + \varphi)}. \quad (2.36)$$

Pentru determinarea condiției de înfășurare (2.15), se calculează:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\varphi &= R_b \cdot \cos(\delta + \varphi) + \dot{u}_\varphi \cdot \sin \chi \cdot \cos(\delta + \varphi) - u \cdot \sin \chi \cdot \sin(\delta + \varphi); \\ \dot{Z}_\varphi &= \dot{u}_\varphi \cdot \cos \chi + p; \end{aligned} \quad (2.37)$$

și

$$\dot{u}_\varphi = \frac{-R_b + H \cdot \cos(\delta + \varphi)}{\sin \chi \cdot \sin^2(\delta + \varphi)}. \quad (2.38)$$

Ansamblul ecuațiilor (2.7) și (2.34), vezi de asemenea (2.37) și (2.38), determină curba caracteristică pe suprafața Σ .

Secțiunea axială a suprafeței sculei S, se deduce din (2.34):

$$S_A : \begin{cases} X = H; \text{ (H-variable, } H_{\min} = R_b, H_{\max} = R_e); \\ R = \sqrt{Y^2(\varphi) + Z^2(\varphi)}. \end{cases} \quad (2.39)$$

În tabelul 2.4 și figura 2.10, se prezintă coordonatele și forma secțiunii axiale ale sculei cilindro-frontale pentru generarea unui melc având caracteristicile: $m = 10$ mm;

$$R_b = \frac{m \cdot k}{2} \cdot \cos 20^\circ \text{ mm}; \quad R_e = \frac{m \cdot k}{2} + m \text{ mm}.$$

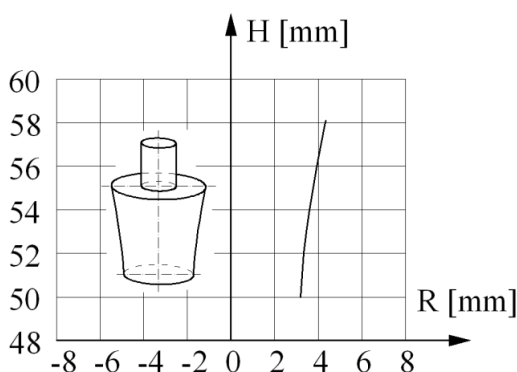


Fig. 2.10. Forma secțiunii axiale a sculei cilindro-frontale

Tabelul 2.3. Coordonatele punctelor de pe curba caracteristică

X [mm]	Y [mm]	Z [mm]
58.100	-1.395	4.112
58.000	-1.390	4.092
57.000	-1.350	3.900
56.000	-1.312	3.719
55.000	-1.276	3.549
54.000	-1.244	3.393
53.000	-1.217	3.252
52.000	-1.195	3.130
51.000	-1.182	3.030
50.000	-1.185	2.966

Tabelul 2.4. *Coordonatele punctelor de pe secțiunea axială a sculei*

R [mm]	H [mm]
58.100	4.342
58.000	4.322
57.000	4.127
56.000	3.944
55.000	3.771
54.000	3.614
53.000	3.472
52.000	3.350
51.000	3.252
50.000	3.194

1.1.6. Profilarea sculelor inelare – metodă grafică în CATIA, bazată pe teorema traiectoriilor plane de generare

Generarea suprafețelor elicoidale cu o sculă inelară este un procedeu deosebit de productiv utilizat, de regulă, pentru fabricația în serie a șuruburilor lungi (șuruburi conducătoare din construcția mașinilor-unelte).

Sculele au diametre relativ mari, suprafața lor activă fiind o suprafață de revoluție cuprinzătoare. Axa sculei inelare este disjunctă axei suprafeței elicoidale, astfel încât aceasta să fie normală pe tangenta la elicea corespunzătoare diametrului exterior al suprafeței elicoidale.

Cinematica procesului de generare presupune următoarele mișcări:

I – mișcarea de rotație a semifabricatului în jurul axei proprii, axa \vec{V} ;

II – translația semifabricatului în lungul axei \vec{V} , corelată cu mișcarea de rotație, ansamblul celor două mișcări determinând o mișcare elicoidală de axă și parametru elicoidal identice cu cele ale elicoidului de generat;

III – mișcarea de așchiere executată de către scula inelară.

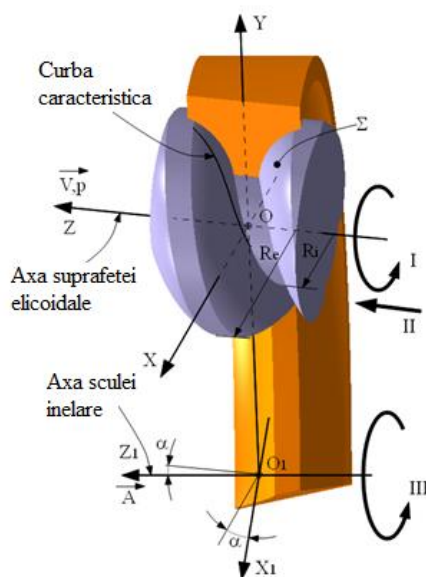


Fig. 3.1. *Suprafața cuprinzătoare a sculei inelare. Sisteme de referință*

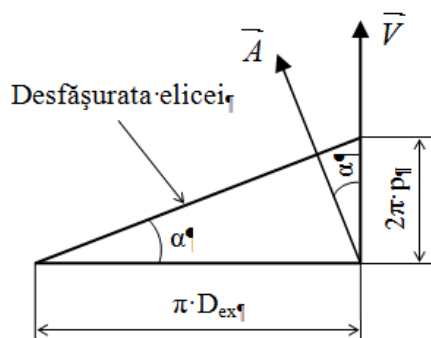


Fig. 3.2. Poziția axei \vec{A} în raport cu axa \vec{V}

Exprimarea formală a acestei cinematici se poate face după definirea următoarelor sisteme de referință (vezi Fig. 3.1):

XYZ , reprezentând un sistem asociat suprafeței elicoidale (semifabricatului) și având axa Z suprapusă axei suprafeței și

$X_1Y_1Z_1$ – sistem solidar cu axa sculei inelare, având axa Z_1 suprapusă axei \vec{A} a sculei inelare și axa X_1 suprapusă axei X a sistemului suprafeței.

Distanța, măsurată în lungul axei X (X_1) între axele Z și Z_1 este notată cu a și reprezintă o mărime constructivă. Unghiul α între axele Z și Z_1 este determinat din condiția ca axa \vec{A} să fie normală la elicea de diametru D_{ex} a suprafeței elicoidale de generat (figura 3.2):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2p}{D_{ex}}\right). \quad (3.1)$$

Problema care trebuie rezolvată este aceea în care, cunoscând forma suprafeței elicoidale, se urmărește determinarea profilului sculei inelare generatoare.

Algoritm de profilare a sculei inelare

Metoda traiectoriilor de generare aplicată în acest caz pornește de la suprafața elicoidală de generat, cunoscută în forma:

$$\Sigma \begin{cases} X = X(u, \varphi); \\ Y = Y(u, \varphi); \\ Z = Z(u, \varphi), \end{cases} \quad (3.2)$$

cu u și φ – variabile independente.

Se transferă apoi ecuațiile suprafeței Σ din sistemul XYZ în sistemul $X_1Y_1Z_1$ prin transformarea:

$$X_1 = \alpha[X - a], \quad (3.3)$$

cu

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

a reprezentând o mărime constructivă.

Principial, ecuațiile suprafeței elicoidale (3.2), urmare a transformării (3.3) ajung la forma:

$$\Sigma \begin{cases} X_1 = X_1(u, \varphi); \\ Y_1 = Y_1(u, \varphi); \\ Z_1 = Z_1(u, \varphi). \end{cases} \quad (3.5)$$

Prin secționarea suprafeței Σ cu planul $Z_1 = H$ (cu H – variabilă arbitrară), se obține curba C_{Σ_H} , având, în principiu, ecuațiile:

$$C_{\Sigma_H} \begin{cases} X_1 = X_1(u); \\ Y_1 = Y_1(u); \\ Z_1 = H, \end{cases} \quad (3.6)$$

vezi și figura 3.3.

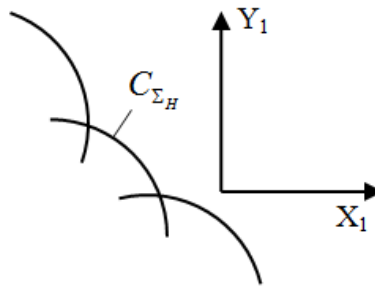


Fig. 3.3. Familia de traiectorii $(C_{\Sigma_H})_v$, din planul $Z_1 = H$

Familia de traiectorii plane de generare se definește ca fiind familia descrisă de curba aparținând suprafeței elicoidale, din secțiunea plană ortogonală axei viitoare scule inelare, în mișcarea de rotație în jurul axei sculei inelare, de parametru unghiular v :

$$X_1 = \omega_3^T(v) \begin{pmatrix} X_1(u) \\ Y_1(u) \\ H \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

unde ω_3^T este matricea transformării de coordonate corespunzătoare rotației în jurul axei Z_1 . Prin dezvoltare rezultă:

$$(C_{\Sigma_H})_v \begin{cases} X_1 = X_1(u) \cdot \cos v - Y_1(u) \cdot \sin v; \\ Y_1 = X_1(u) \cdot \sin v + Y_1(u) \cdot \cos v; \\ Z_1 = H. \end{cases} \quad (3.8)$$

Condiția de înfășurare se obține pornind de la teorema specifică a metodei familiei de traiectorii de generare, potrivit căreia suprafața de revoluție cuprinzătoare reciproc înfășurătoare familiei de traiectorii de generare este locul geometric al punctelor aparținând curbilor C_{Σ_H} , din diferitele secțiuni plane H , pentru care normala la aceste curbe intersectează axa sculei inelare.

Se definește normala în punctul curent al curbei C_{Σ_H} (3.6) și se calculează cosinusurile directoare ale acesteia

$$\vec{N}_{C_{\Sigma H}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{X}_{1_u} & \dot{Y}_{1_u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{Y}_{1_u} \cdot \vec{i} - \dot{X}_{1_u} \cdot \vec{j}, \quad (3.9)$$

după care se scriu ecuațiile normalei:

$$N_{C_{\Sigma H}} \begin{cases} X_1 = X_1(u) + \lambda \cdot \dot{Y}_{1_u}; \\ Y_1 = Y_1(u) - \lambda \cdot \dot{X}_{1_u}; \\ Z_1 = H, \end{cases} \quad (3.10)$$

cu λ – parametru variabil.

Se determină familia normalelor (3.9), din (3.10) și (3.7):

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1(u) + \lambda \cdot \dot{Y}_{1_u} \\ Y_1(u) - \lambda \cdot \dot{X}_{1_u} \\ H \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

sau, după dezvoltare:

$$\left(N_{C_{\Sigma H}} \right)_v \begin{cases} X_1 = [X_1(u) + \lambda \cdot \dot{Y}_{1_u}] \cos v - [Y_1(u) - \lambda \cdot \dot{X}_{1_u}] \sin v; \\ Y_1 = [X_1(u) + \lambda \cdot \dot{Y}_{1_u}] \sin v + [Y_1(u) - \lambda \cdot \dot{X}_{1_u}] \cos v; \\ Z_1 = H, \end{cases} \quad (3.12)$$

cu v – parametrul familiei.

În sistemul de referință $X_1Y_1Z_1$, asociat sculei inelare, axa \vec{A} are ecuațiile:

$$A \begin{cases} X_1 = 0; \\ Y_1 = 0; \\ Z_1 = H, \end{cases} \quad (3.13)$$

cu H variabil. Astfel, condițiile ca normalele familiei să intersecteze axa sunt:

$$\begin{cases} [X_1(u) + \lambda \cdot \dot{Y}_{1_u}] \cos v - [Y_1(u) - \lambda \cdot \dot{X}_{1_u}] \sin v = 0; \\ [X_1(u) + \lambda \cdot \dot{Y}_{1_u}] \sin v + [Y_1(u) - \lambda \cdot \dot{X}_{1_u}] \cos v = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Prin eliminarea parametrului λ din sistemul de ecuații (3.14), se obține condiția de înfășurare specifică:

$$X_1(u) \cdot \dot{X}_{1_u} + Y_1(u) \cdot \dot{Y}_{1_u} = 0. \quad (3.15)$$

Forma secțiunii axiale a sculei inelare – ansamblul ecuațiilor (3.8) ale familiei de traiectorii plane, împreună cu condiția (3.15), pentru H variabil arbitrar, reprezintă suprafața înfășurătoare, respectiv suprafața de revoluție cuprinzătoare a viitoarei scule inelare, principial de forma:

$$S \begin{cases} X_1 = X_1(v, H); \\ Y_1 = Y_1(v, H); \\ Z_1 = H. \end{cases} \quad (3.16)$$

Secțiunea axială a sculei inelare se determină în forma (vezi și figura 3.4):

$$SA \begin{cases} R = \sqrt{[X_1(v, H)]^2 + [Y_1(v, H)]^2}, \\ Z_1 = H. \end{cases} \quad (3.17)$$

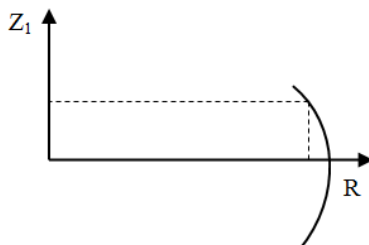


Fig. 3.4. Secțiunea axială a sculei inelare

1.1.7. Profilarea sculei inelare pentru prelucrarea unui filet trapezoidal

În cele ce urmează, se propune o aplicație numerică pentru algoritmul prezentat mai sus: profilarea sculei inelare pentru un filet trapezoidal, vezi figura 3.5. Astfel de șuruburi sunt utilizate ca șuruburi conducătoare în lanțurile cinematice ale mașinilor-unelte.

Profilul axial al șurubului se raportează la un sistem de referință XYZ, cu axa Z suprapusă axei șurubului de generat, în timp ce X reprezintă axa de simetrie a golului profilului axial, care este format din trei segmente de dreaptă:

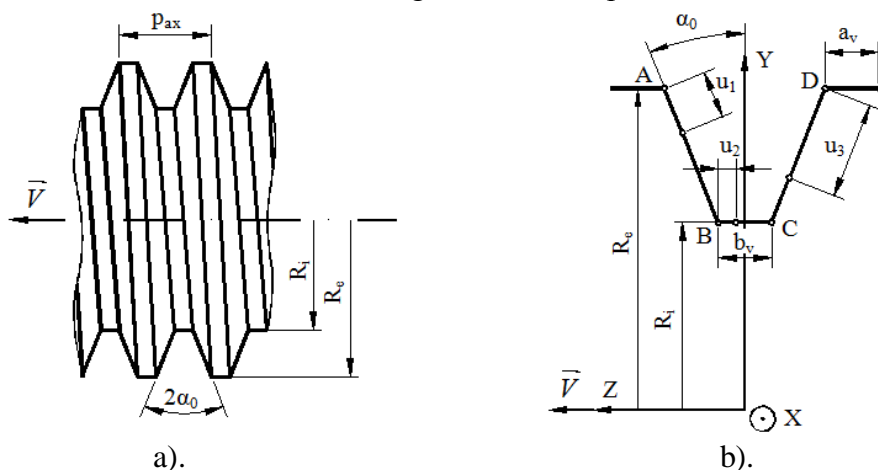


Fig. 3.5. Filetul trapezoidal: a) – modelul solid, b) – profilul axial

$$\overline{AB} \begin{cases} X = 0; \\ Y = R_e - u_1 \cdot \cos \alpha_0; \\ Z = b_v / 2 + (u_{1max} - u_1) \sin \alpha_0, \end{cases} \quad (3.18)$$

cu u_1 – variabil, $u_{1min} = 0$, $u_{1max} = (R_e - R_i) / \cos \alpha_0$,

$$\overline{BC} \begin{cases} X = 0; \\ Y = R_i; \\ Z = b_v / 2 - u_2, \end{cases} \quad (3.19)$$

cu u_2 – variabil, $u_{2min} = -b_v / 2$, $u_{2max} = b_v / 2$,

$$\overline{CD} \begin{cases} X = 0; \\ Y = R_e - u_3 \cdot \cos \alpha_0; \\ Z = -b_v / 2 + (u_3 - u_{3\max}) \sin \alpha_0, \end{cases} \quad (3.20)$$

cu u_3 – variabil, $u_{3\min} = 0$, $u_{3\max} = (R_e - R_i) / \cos \alpha_0$.

Suprafața elicoidală compusă, melc dreapta, de parametru elicoidal $p = p_{ax} / 2\pi$, este generată în mișcarea elicoidală de axă \vec{V} și parametru unghiular φ :

$$\Sigma_{AB} \begin{cases} X = -(R_e - u_1 \cdot \cos \alpha_0) \sin \varphi; \\ Y = (R_e - u_1 \cdot \cos \alpha_0) \cos \varphi; \\ Z = b_v / 2 + (u_{1\max} - u_1) \sin \alpha_0 + p \cdot \varphi; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\Sigma_{BC} \begin{cases} X = -R_i \cdot \sin \varphi; \\ Y = R_i \cdot \cos \varphi; \\ Z = b_v / 2 - u_2 + p \cdot \varphi; \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\Sigma_{CD} \begin{cases} X = -(R_e - u_3 \cdot \cos \alpha_0) \sin \varphi; \\ Y = (R_e - u_3 \cdot \cos \alpha_0) \cos \varphi; \\ Z = -b_v / 2 + (u_3 - u_{3\max}) \sin \alpha_0 + p \cdot \varphi. \end{cases} \quad (3.23)$$

Prin transformarea de coordonate (3.3) se raportează ecuațiile suprafețelor elicoidale la sistemul de referință $X_1Y_1Z_1$ (vezi figura 3.1):

$$\Sigma_{AB} \begin{cases} X_1 = -(R_e - u_1 \cdot \cos \alpha_0) \sin \varphi \cdot \cos \alpha - [b_v / 2 + (u_{1\max} - u_1) \sin \alpha_0 + p \cdot \varphi] \sin \alpha; \\ Y_1 = (R_e - u_1 \cdot \cos \alpha_0) \cos \varphi + a; \\ Z_1 = -(R_e - u_1 \cdot \cos \alpha_0) \sin \varphi \cdot \sin \alpha + [b_v / 2 + (u_{1\max} - u_1) \sin \alpha_0 + p \cdot \varphi] \cos \alpha; \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\Sigma_{BC} \begin{cases} X_1 = -R_i \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha - (b_v / 2 - u_2 + p \cdot \varphi) \sin \alpha; \\ Y_1 = R_i \cdot \cos \varphi + a; \\ Z_1 = -R_i \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha + (b_v / 2 - u_2 + p \cdot \varphi) \cos \alpha; \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Sigma_{CD} \begin{cases} X_1 = -(R_e - u_3 \cdot \cos \alpha_0) \sin \varphi \cdot \cos \alpha - \\ - [-b_v / 2 + (u_3 - u_{3\max}) \sin \alpha_0 + p \cdot \varphi] \sin \alpha; \\ Y_1 = (R_e - u_3 \cdot \cos \alpha_0) \cos \varphi + a; \\ Z_1 = -(R_e - u_3 \cdot \cos \alpha_0) \sin \varphi \cdot \sin \alpha + \\ + [-b_v / 2 + (u_3 - u_{3\max}) \sin \alpha_0 + p \cdot \varphi] \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.26)$$

În legătură forma specifică a condiției (3.15) în cazul aplicației abordate, expresiile derivatelor parțiale pentru cele trei segmente ale profilului rezultă din relațiile (3.24)-(3.26)

$$\overline{AB} \begin{cases} \dot{X}_{1u_1} = \cos \alpha_0 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha + \sin \alpha_0 \cdot \sin \alpha; \\ \dot{Y}_{1u_1} = -\cos \alpha_0 \cdot \cos \varphi; \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\overline{BC} \begin{cases} X_{1u_2} = \sin \alpha; \\ \dot{Y}_{1u_2} = 0; \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\overline{CD} \begin{cases} \dot{X}_{1_{u3}} = \cos \alpha_0 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \alpha_0 \cdot \sin \alpha; \\ \dot{Y}_{1_{u3}} = -\cos \alpha_0 \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ecuțiile (3.24) – (3.26) împreună cu condiția (3.15) în formă specifică, pentru H variabil, determină curbele caracteristice la contactul suprafeței elicoidale compuse cu suprafața sculei inelare.

În continuare, se prezintă un exemplu numeric pentru cazul concret în care: $R_e = 45$ mm, $R_i = 40$ mm, $p_{ax} = 16$ mm, $a_v = 4$ mm, $b_v = 4$ mm, $\alpha = 20^\circ$, $a = 225$ mm, numărul de începuturi $k = 1$. Determinarea curbei caracteristice s-a făcut prin intermediul a 11 puncte, pentru flancul sculei inelare care generează segmentul CD al filetului trapezoidal. Coordonatele acestor puncte s-au determinat cu ajutorul unei aplicații MatLab dezvoltate în acest scop, pe baza algoritmului de profilare descris mai sus și sunt prezentate în tabelul 3.1. Tabelul 3.2 conține coordonatele punctelor care definesc secțiunea axială pentru același flanc al sculei inelare, în forma (3.17). În figura 3.6 se prezintă rezultatele aplicației numerice abordate, în formă grafică.

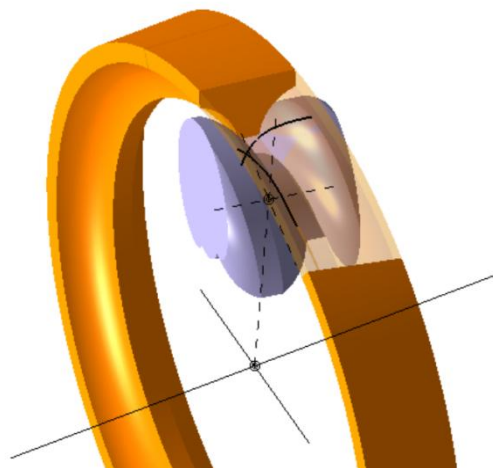


Fig. 3.6. Profilul sculei inelare

Tabelul 3.1. Curba caracteristică

Nr. punct	X_1 [mm]	Y_1 [mm]	Z_1 [mm]
1	1.3417	269.9745	-3.80
2	1.2200	269.4775	-3.62
3	1.0998	268.9806	-3.44
4	0.9795	268.4839	-3.26
5	0.8592	267.9873	-3.08
6	0.7405	267.4909	-2.90
7	0.6219	266.9946	-2.72
8	0.5035	266.4985	-2.54
9	0.3861	266.0025	-2.36
10	0.2691	265.5067	-2.18
11	0.1525	265.0111	-2.00

Tabelul 3.2. Secțiunea axială

R [mm]	H [mm]
269.9778	-3.80
269.4802	-3.62
268.9829	-3.44
268.4857	-3.26
267.9887	-3.08
267.4919	-2.90
266.9953	-2.72
266.4989	-2.54
266.0028	-2.36
265.5068	-2.18
265.0112	-2.00

Notă: În punctele *B* și *C*, pe profilul de generat apar discontinuități ce trebuie tratate separat pentru profilarea sculei.

Metodă grafică în CATIA

Pentru a rezolva această problemă de profilare a fost dezvoltat un algoritm grafic în mediul de proiectare CATIA.

Algoritmul pornește de la crearea celor două sisteme de referință menționate anterior, în prezentarea metodei analitice.

Generatoarea suprafeței elicoidale este desenată în planul *XOY* iar respectiva suprafață este generată virtual prin aplicarea comenzii *SWEEP*.

Ca directoare a suprafeței elicoidale este definită o elice de axă \vec{V} și parametru elicoidal *p*.

În același sistem de referință se trasează o linie tangentă la elice, linie care va reprezenta axa sculei inelare.

În sistemul de referință al sculei, $X_1Y_1Z_1$, se generează un plan, prin metoda „*prin punct și linie*” (*through point and line*), punctul de referință fiind originea sistemului de referință al sculei iar linia de referință linia anterior desenată.

Axa \vec{A} este generată ca linie normală la acest plan și care trece prin originea sistemului de referință $X_1Y_1Z_1$. Pentru această linie am selectat opțiunea „*lungime infinită*”.

Celelalte două axe ale sistemului de referință au fost definite ca linii perpendiculare pe o curbă, respectiv axa \vec{A} , și care trec prin originea sistemului de referință $X_1Y_1Z_1$. Suportul fiecăreia dintre aceste linii este planul corespunzător al sistemului de referință adică planul Z_1X_1 pentru axa X_1 și, respectiv, planul Z_1Y_1 pentru axa Y_1 .

În continuare se generează un plan paralel cu planul X_1Y_1 și aflat la distanță *H* de acesta. Curbă de intersecție între acest plan și suprafața elicoidală, obținută cu comanda *INTERSECTION* va fi o curbă plană care aparține suprafeței elicoidale.

Pe această curbă se generează un punct utilizând opțiunea „*on-curve*” și cu opțiunea de poziționare pe curbă de tipul „*ratio of curve length*”. Inițial valoarea acestei valori de poziționare este arbitrară (vezi figura 3.7).

Se generează un punct ca intersecție între axa sculei și planul $Z_1 = H$ și, ulterior, se trasează o linie prin acest punct și un punct aparținând curbei de intersecție (comanda *LINE*, opțiunea „*point-point*”, vezi figura 3.8).

În continuare, din punctul aparținând curbei de intersecție se generează o linie tangentă la curbă și se măsoară unghiul pe care aceasta îl face cu linia desenată anterior.

Modificând valoarea parametrului „*ratio of curve length*” care stabilește poziția punctului în lungul curbei se modifică automat și valoarea unghiului menționat.

Monitorizând valoarea acestui unghi este posibil să se determine punctul în care are valoarea de 90° . În această poziție tangenta este perpendiculară pe linia care unește un punct de pe curba plană cu un punct de pe axa sculei.

Această relație de perpendicularitate înseamnă că linia este normală pe curbă și, din construcție, intersectează axa sculei. Deci, este îndeplinită condiția de înfășurare și punctul de pe curba de intersecție aparține și curbei caracteristice.

Procesul se reia pentru diverse valori ale parametrului H , obținând astfel un set de puncte pe curba caracteristică.

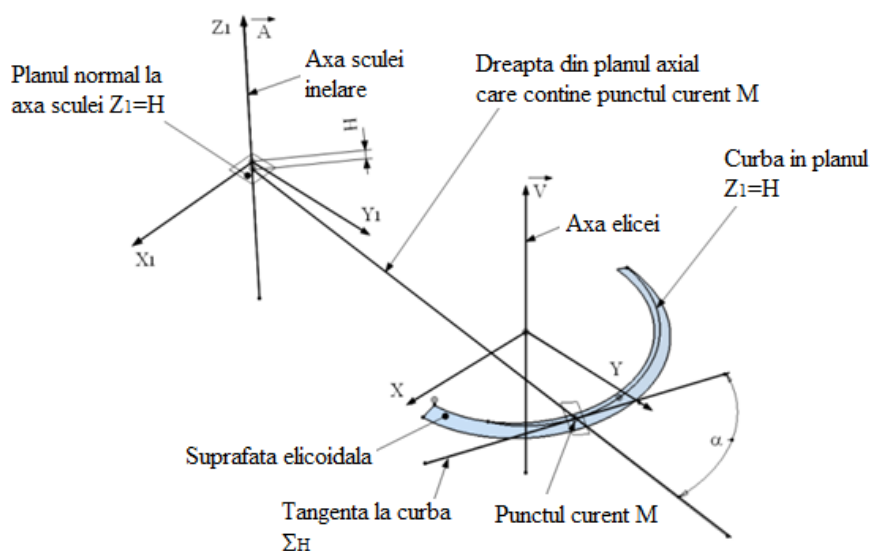


Fig. 3.7. Punctul curent pe linia tangentă la Σ_H : și dreapta trasată între punctul curent și axa sculei — AM , (pentru $\alpha \neq \pi/2$)

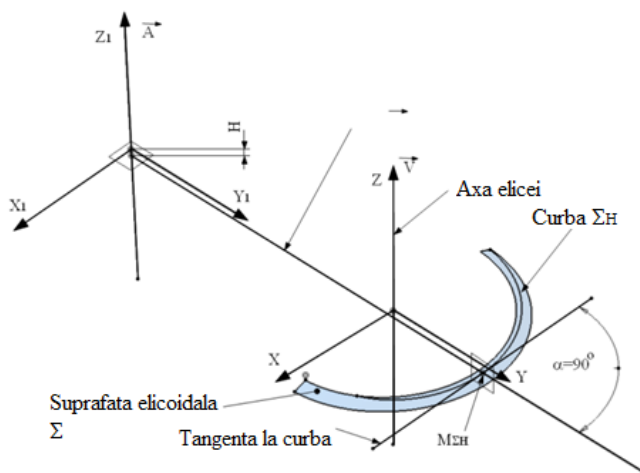


Fig. 3.8. Punct pe curba caracteristică: normala la Σ_H intersectează axa sculei — AM_N , ($\alpha = \pi/2$)

Rezultatele obținute prin această metodă sunt foarte apropiate de cele determinate analitic. Diferențele sunt de ordinul a 10^{-3} mm ceea ce înseamnă o concordanță foarte bună între cele două metode.

1.1.8. Scula inelară tangențială – metodă de profilare grafică în mediul CATIA

Scula inelară tangențială, materializată sub forma unui corp de frezat cu dantura frontală sau a unui corp abraziv inelar, este utilizată pe mașini unelte specializate, pentru generarea melcilor de lungimi mari, de exemplu a șuruburilor conducătoare sau a șuruburilor active ale preselor cu șurub.

Profilarea suprafețelor active ale acestui tip de sculă se poate face în baza teoremelor fundamentale ale înfășurării suprafețelor.

Soluții pentru profilarea acestui tip de sculă s-au realizat și în formă grafică, prin reprezentarea în plan a unei familii de linii elicoidale aparținând suprafeței elicoidale și determinând cercuri tangente la acestea, cercuri aparținând suprafeței de revoluție – metodă dificilă și puțin riguroasă.

Totodată, au fost prezentate metode complementare pentru studiul suprafețelor în înfășurare, dezvoltându-se teoreme și algoritmi specifici precum „metoda distanței minime” și „metoda familiei de cercuri substitutive” capabile a da soluții simple și rapide a formei suprafețelor de revoluție conjugate unei suprafețe elicoidale.

Sunt cunoscute și metode grafice pentru profilarea sculelor – suprafețe de revoluție, utilizând mediul grafic de proiectare CAD. Soluții noi s-au realizat după apariția mediilor de proiectare grafică, inițial în AutoCAD, precum și într-o formă mai evoluată și evident mai riguroasă prin reprezentarea 3D, și în baza unor algoritmi dezvoltați în limbajul de programare LISP de către.

Mai recent, s-au propus algoritmi dezvoltați în mediul de proiectare grafică CATIA de către, care abordează probleme complexe de profilare a sculelor mărginite de suprafețe de revoluție, reciproc înfășurătoare cu suprafețe elicoidale cilindrice și de pas constant, pentru studiul proceselor de contact a suprafeței elicoidale cilindrice și de pas constant, în contact cu o suprafață de revoluție.

Probleme similare, dezvoltă și utilizând aproximări cu polinoame de grad superior a liniilor pe suprafețe – metoda Boolean.

În lucrare, se propune o nouă teoremă complementară adaptată problemei contactului unei suprafețe elicoidale cu o suprafață de revoluție – teorema traiectoriilor relative de generare pentru care se prezintă un suport analitic și totodată, bazat pe acesta, un algoritm dezvoltat în mediul de proiectare grafică CATIA.

Scula inelară. Cinematică și sisteme de referință

Scula inelară tangențială are ca suprafață activă o suprafață de revoluție, de axă \bar{A} , disjunctă axei suprafeței elicoidale de generat, axa \bar{V} , vezi figura 4.1.

Se definesc sistemele de referință:

XYZ este sistemul solidar suprafeței elicoidale, axa \bar{V} , suprapusă axei Z , este axa suprafeței elicoidale de generat;

$X_1Y_1Z_1$ – sistemul solidar axei suprafeței de revoluție – suprafața activă a sculei inelare tangențiale, cu axa Z_1 suprapusă axei \bar{A} a sculei inelare;

$X'Y'Z'$ – sistem ajutător, cu axele paralele și orientate în același sens cu XYZ și originea O' într-un plan tangent la cilindrul de rază r_e – raza exterioară a melcului;

$X_0Y_0Z_0$ – sistem ajutător cu axele paralele și de același sens cu XYZ , cu originea O_0 în planul $Y'Z'$, definită de coordonatele $X'=re$; $Y'=b$; $Z'=c$, în care b și c sunt mărimi constructive.

Sistemul $X_1Y_1Z_1$ este rotit în jurul axei Y_0 , vezi figura 1, de unghi β ; β este o mărime constructivă determinată din condiția de evitare a interferenței suprafeței de revoluție cu cilindrul exterior al suprafeței elicoidale de generat.

Cinematica procesului de generare include mișcările:

I este mișcarea de rotație a suprafeței elicoidale de generat în jurul axei \vec{V} ;

II – translația suprafeței elicoidale în lungul axei proprii (axa \vec{V}) corelată cu mișcarea de rotație;

III – rotația sculei în jurul axei \vec{A} .

În sistemul XYZ , este definită suprafața elicoidală, cilindrică și de pas constant, de axă $\vec{V}(Z)$ și parametru elicoidal p , în forma dată, principal, de ecuații (4.1):

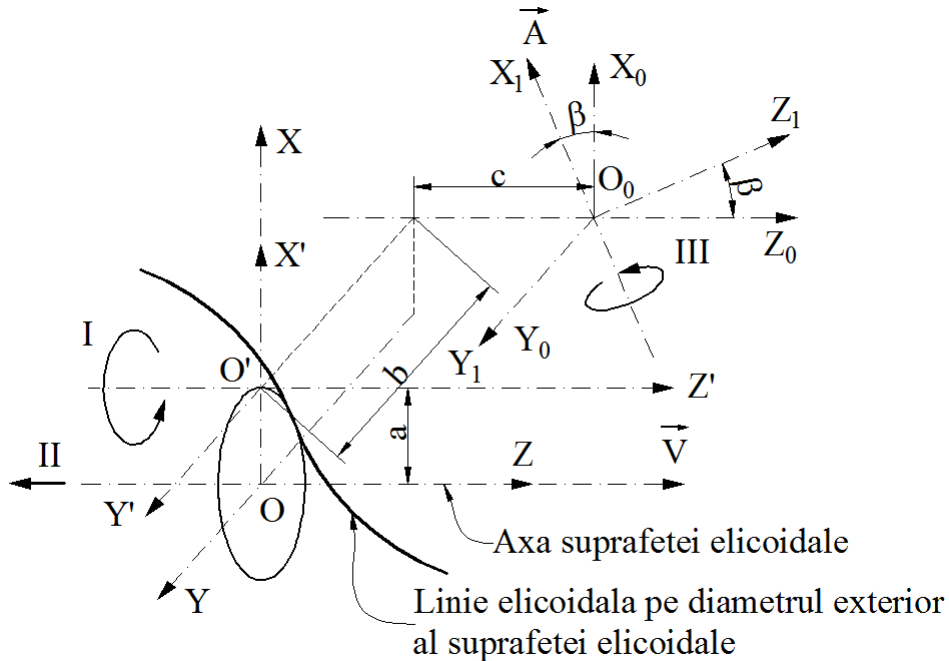


Fig. 4.1. Suprafața elicoidală a sculei inelare; sistem de referință

$$\Sigma \begin{cases} X = X(u, v); \\ Y = Y(u, v); \\ Z = pv, \end{cases} \quad (4.1)$$

cu u și v parametri variabili – u parametru în lungul curbei reprezentând secțiunea axială a suprafeței elicoidale; v – parametru unghiular la rotația în jurul axei $\vec{V}(Z)$; p – parametrul elicoidal.

Poziția relativă a sistemelor de referință, anterior prezentate, vezi figura 1, și, deci, a suprafeței Σ în sistemul $X_1Y_1Z_1$ al sculei inelare, este:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(u, v) - a \\ Y(u, v) + b \\ pv - c \end{pmatrix}; \quad (4.2)$$

În final, după dezvoltare, suprafața Σ devine:

$$\Sigma \begin{cases} X_1 = [X(u, v) - a] \cos \beta - (pv - c) \sin \beta; \\ Y_1 = Y(u, v) + b; \\ Z_1 = [X(u, v) - a] \sin \beta + (pv - c) \cos \beta. \end{cases} \quad (4.3)$$

Teorema traiectoriilor relative de generare

Determinarea înfășurătoarei suprafeței elicoidale cu o sculă – suprafața de revoluție de axă \vec{A} (scula inelară tangențială) se poate face și în baza teoremei complementare a traiectoriilor relative de generare.

Se examinează contactul între traiectoriile relative în mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} , vezi figura 4.1, a curbelor reprezentând secțiuni plane, cu plane ortogonale axei \vec{A} , a suprafeței elicoidale Σ .

Fie planul curent ortogonal axei $\vec{A}(X_1)$, figura 4.1:

$$X_1 = H, \tag{4.4}$$

cu H variabilă arbitrară.

Din (4.3), rezultă condiția:

$$[X(u, v) - a] \cos \beta - (pv - c) \sin \beta = H, \tag{4.5}$$

cu H arbitrar.

Ansamblul ecuațiilor (4.3) și (4.5) reprezintă o curbă pe suprafața Σ , principal, în forma:

$$\Sigma_H \begin{cases} X_1 = H; \\ Y_1 = Y_1(v); \\ Z_1 = Z_1(v), \end{cases} \tag{4.6}$$

acceptând că forma (4.5) permite determinarea unei dependențe:

$$u = u(v). \tag{4.7}$$

Familia traiectoriilor relative de generare este constituită din ansamblul curbelor reprezentând traiectoriile generate de curbele Σ_H (4.6) în mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} a suprafeței de revoluție căutate (suprafața activă a sculei tangențiale). Mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} este descrisă de transformarea:

$$X_1 = \omega_1^T(\Phi) \cdot \begin{pmatrix} X_{1\Sigma_H} \\ Y_{1\Sigma_H} \\ Z_{1\Sigma_H} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

în care $X_{1\Sigma_H}$, $Y_{1\Sigma_H}$, $Z_{1\Sigma_H}$ sunt date de (4.6) și Φ – parametrul unghiular în mișcarea de rotație.

Familia traiectoriilor relative de generare este dată de:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H \\ Y_1(v) \\ Z_1(v) \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

cu H – variabilă arbitrară, sau:

$$(T_H)_\Phi \begin{cases} X_1 = H; \\ Y_1 = Y_1(v) \cos \Phi - Z_1(v) \sin \Phi; \\ Z_1 = Y_1(v) \sin \Phi + Z_1(v) \cos \Phi. \end{cases} \quad (4.10)$$

Se enunță teorema complementară a familiei traiectoriilor relative de generare: suprafața de revoluție reciproc înfășurătoare unei suprafețe elicoidale, cilindrice și de pas constant, este locul geometric al familiei traiectoriilor relative de generare pentru care normalele la acestea sunt incidente axei suprafeței de revoluție.

Parametrii directori ai normalei la familia de traiectorii de generare $(T_H)_\Phi$ (4.10) se determină din:

$$\vec{n}_{(T_H)_\Phi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -Y_1(v) \sin \Phi - Z_1(v) \cos \Phi & Y_1(v) \cos \Phi + Z_1(v) \sin \Phi \\ 0 & \dot{Y}_{1v} \cos \Phi - \dot{Z}_{1v} \sin \Phi & \dot{Y}_{1v} \sin \Phi + \dot{Z}_{1v} \cos \Phi \end{vmatrix}, \quad (4.11)$$

sau, după dezvoltare, rezultă:

$$\begin{aligned} (n_{T_H})_{X_1} &= Y_1(v) \cdot \dot{Y}_{1v} + Z_1(v) \cdot \dot{Z}_{1v}; \\ (n_{T_H})_{Y_1} &= 0; \\ (n_{T_H})_{Z_1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Astfel, familia normalelor în punctul curent al traiectoriilor relative de generare poate fi scrisă în forma, vezi (4.10) și (4.12):

$$(N_{T_H})_{\Phi, \lambda} \begin{cases} X_1 = H + \lambda \left[Y_{1(v)} \cdot \dot{Y}_{1v} + Z_{1(v)} \cdot \dot{Z}_{1v} \right]; \\ Y_1 = Y_{1(v)} \cos \Phi + Z_{1(v)} \sin \Phi + \lambda \cdot 0; \\ Z_1 = -Y_{1(v)} \sin \Phi + Z_{1(v)} \cos \Phi + \lambda \cdot 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

cu λ – parametru scalar variabil.

Condițiile de incidență ale familie normalelor (4.13) cu axa de rotație \vec{A} ,

$$\vec{A} = H\vec{i}, \quad (4.14)$$

cu H – scalar variabil, se reduc la, vezi și (4.13):

$$Y_{1(v)} \cdot \dot{Y}_{1v} + Z_{1(v)} \cdot \dot{Z}_{1v} = 0. \quad (4.15)$$

Ansamblul ecuațiilor (4.15) și (4.10) reprezintă curba caracteristică (de contact între suprafața elicoidală Σ și suprafața de revoluție a sculei inelare tangențiale S), în sistemul $X_1Y_1Z_1$, principal, în forma:

$$C_\Sigma \equiv C_S \begin{cases} X_1 = H; \\ Y_1 = Y_1(\Phi); \\ Z_1 = Z_1(\Phi), \end{cases} \quad (4.16)$$

cu H – variabilă arbitrară.

Prin rotirea curbei caracteristice în jurul axei \vec{A} , se determină suprafața de revoluție S , suprafața periferică primară, de revoluție, a sculei inelare tangențiale, vezi figura 2:

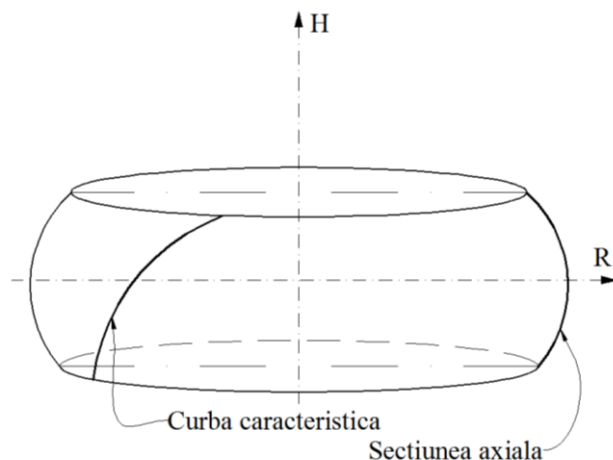


Fig. 4.2. Curba caracteristică pe suprafața S ; secțiunea axială a suprafeței S

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \omega_1^T(\theta) \cdot \begin{pmatrix} H \\ Y_1(\Phi) \\ Z_1(\Phi) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

sau, dezvoltat:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H \\ Y_1(\Phi) \\ Z_1(\Phi) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

cu θ parametru unghiular variabil.

Prin urmare, rezultă ecuațiile parametrice ale suprafeței S :

$$\begin{aligned} X_1 &= H; \\ Y_1 &= Y_1(\Phi) \cos \Phi - Z_1(\Phi) \sin \Phi; \\ Z_1 &= Y_1(\Phi) \sin \Phi + Z_1(\Phi) \cos \Phi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Astfel, secțiunea axială a suprafeței S are ecuațiile:

$$\begin{aligned} H &= X_1; \\ R &= \sqrt{Y_1^2(\Phi) + Z_1^2(\Phi)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

reprezentând profilul sablonului de control al suprafeței active periferice primare a sculei inelare tangențiale.

Metodă grafică în CATIA

Pentru a rezolva această problemă de profilare a fost dezvoltat un algoritm grafic în mediul de proiectare CATIA similar cu cel prezentat anterior.

Algoritmul pornește de la crearea celor două sisteme de referință menționate.

Generatoarea suprafeței elicoidale este desenată în planul XOY iar respectiva suprafață este generată virtual prin aplicarea comenzii *SWEEP*.

Ca directoare a suprafeței elicoidale este definită o elice de axă \vec{V} și parametru elicoidal p .

În același sistem de referință se trasează o linie tangentă la elice, linie care va reprezenta axa sculei inelare tangențiale.

În sistemul de referință al sculei, $X_1Y_1Z_1$, se generează un plan, prin metoda „*prin punct și linie*” (*through point and line*), punctul de referință fiind originea sistemului de referință al sculei iar linia de referință linia anterior desenată.

Axa \vec{A} este generată ca linie normală la acest plan și care trece prin originea sistemului de referință $X_1Y_1Z_1$. Pentru această linie am selectat opțiunea „*lungime infinită*”.

Celelalte două axe ale sistemului de referință au fost definite ca linii perpendiculare pe o curbă, respectiv axa \vec{A} , și care trec prin originea sistemului de referință $X_1Y_1Z_1$. Suportul fiecăreia dintre aceste linii este planul corespunzător al sistemului de referință adică planul Z_1X_1 pentru axa X_1 și, respectiv, planul Z_1Y_1 pentru axa Y_1 .

În continuare se generează un plan paralel cu planul X_1Y_1 și aflat la distanță H de acesta. Curba de intersecție între acest plan și suprafața elicoidală, obținută cu comanda *INTERSECTION* va fi o curbă plană care aparține suprafeței elicoidale.

Pe această curbă se generează un punct utilizând opțiunea „*on-curve*” și cu opțiunea de poziționare pe curbă de tipul „*ratio of curve length*”. Inițial valoarea acestei valori de poziționare este arbitrară.

Se generează un punct ca intersecție între axa sculei și planul $Z_1 = H$ și, ulterior, se trasează o linie prin acest punct și un punct aparținând curbei de intersecție (comanda *LINE*, opțiunea „*point-point*”).

În continuare, din punctul aparținând curbei de intersecție se generează o linie tangentă la curbă și se măsoară unghiul pe care aceasta îl face cu linia desenată anterior.

Modificând valoarea parametrului „*ratio of curve length*” care stabilește poziția punctului în lungul curbei se modifică automat și valoarea unghiului menționat. Monitorizând valoarea acestui unghi este posibil să se determine punctul în care are valoarea de 90° . În această poziție tangenta este perpendiculară pe linia care unește un punct de pe curba plană cu un punct de pe axa sculei.

Această relație de perpendicularitate înseamnă că linia este normală pe curbă și, din construcție, intersectează axa sculei. Deci, este îndeplinită condiția de înfășurare și punctul de pe curba de intersecție aparține și curbei caracteristice.

Procesul se reia pentru diverse valori ale parametrului H , obținând astfel un set de puncte pe curba caracteristică.

1.2. Profilarea sculei de rabotat pentru generarea suprafețelor elicoidale. Metodă grafică în CATIA

Sculele de rabotat suprafețe elicoidale cilindrice și de pas constant generează, în procesul de generare a unei suprafețe elicoidale, o suprafață cilindrică.

Generatoarea acestei suprafețe cilindrice, în mod curent, este tangenta la elicea cilindrului de rază maximă a suprafeței elicoidale.

Profilarea sculei de rabotat presupune a determina o suprafață cilindrică reciproc înfășurătoare cu suprafața elicoidală de generat.

Metodica generală de profilare face apel la teorema fundamentală a înfășurării suprafețelor Litvin.

De asemenea, au fost elaborate teoreme analitice complementare pentru studiul contactului între o suprafață elicoidală și o suprafață cilindrică de către Oancea și Teodor.

Literatura de specialitate acordă atenție problemei de acest tip, astfel Petukhov tratează analitic precizia realizării șablonului pentru controlul suprafețelor elicoidale generate cu scule disc, stabilind forma și mărimea erorilor de generare în funcție de poziția sculei în raport cu suprafața elicoidală generată.

De asemenea, Petukhov tratează influența formei suprafeței de așezare a sculei asupra preciziei muchiei de așchiere și a calității suprafeței elicoidale generate.

Totodată, sunt prezentate noi modele matematice pentru profilarea sculelor, Kiryutin.

Dezvoltarea mediilor grafice de proiectare, precum CATIA, au permis dezvoltarea unor metodici grafice specifice pentru profilarea acestor tipuri de scule Berbinschi et al.

În lucrare, în baza unei metode noi de determinare a traiectoriilor relative de generare, se propune un algoritm specific dezvoltat în CATIA, pentru profilarea sculei de rabotat (suprafața cilindrică) reciproc înfășurătoare unei suprafețe elicoidale cilindrice și de pas constant. Se prezintă și aplicații numerice pentru rotorii elicoidali.

1.2.1. Metoda „traietoriilor plane de generare”

Pentru aplicarea metodei complementare a traiectoriilor plane de generare la profilarea sculei cilindrice reciproc înfășurătoare unei suprafețe elicoidale cilindrice de pas constant se acceptă sistemele de referință, figura 1, în care sunt definite:

- modelul suprafeței elicoidale de generat, cu flancul elicoidal Σ ;
- direcția \vec{t} a generatoarelor suprafeței cilindrice (generatoarele suprafeței cilindrice – scula de rabotat) ca fiind paralele cu tangenta la linia elicoidală aparținând cilindrului exterior al suprafeței elicoidale de rază R_e ;
- desfășurata liniei elicoidale a golului corespunzătoare cilindrului de rază R_e (fig. 3.1.b), elice de parametru p .

Se definesc:

- XYZ este sistemul de referință asociat suprafeței elicoidale Σ (Z – axa elicoidului);
- $X_1Y_1Z_1$ – sistem asociat generatoarei \vec{t} a suprafeței cilindrice conjugate (scula de rabotat), având axa Z_1 suprapusă direcției \vec{t} ;
- xyz – sistem de referință fix.

Se notează cu α unghiul dintre axa elicoidului $\vec{V}(Z)$ și tangenta la elicea de rază R_e , iar

$$\tan \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_e}{2 \cdot \pi \cdot p} = \frac{R_e}{p} \quad (5.1)$$

cu p – parametrul elicoidal al suprafeței elicoidale Σ . Se face observația că axele X și X_1 , figura 5.1, ale celor două sisteme de referință au aceeași direcție și sens – normala la axa elicoidului \vec{V} , p căruia îi aparține suprafața elicoidală Σ .

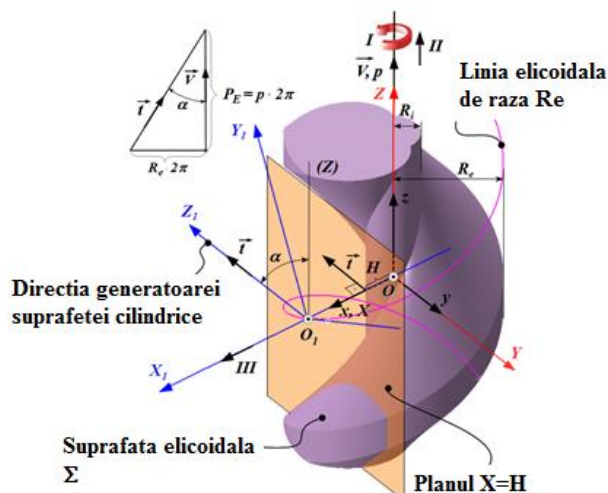


Fig. 5.1. Suprafața elicoidală Σ ; sistemele de referință; directoarea suprafeței cilindrice

Cinematica procesului de generare cu scula de rabotat a suprafeței elicoidale include mișcările, figura 5.1:

- ansamblul de mișcări I și II , rotație și translație a suprafeței elicoidale în jurul, și corelat, în lungul axei \bar{V} - mișcarea elicoidală \bar{V}, p , în decursul căreia suprafața Σ se autogenerază;

- mișcarea rectilinie III (fizic, alternativă) în lungul generatoarei \bar{t} , executată de scula cilindrică (scula de rabotat, nereprezentată în figură).

În acest ansamblu de mișcări, suprafața elicoidală Σ și suprafața cilindrică de generatoare \bar{t} , suprafața sculei S sunt suprafețe reciproc înfășurătoare.

Conform metodei traiectoriilor relative de generare, se consideră contactul între profiluri plane ale suprafețelor Σ , respectiv S (necunoscută ca formă) în mișcarea relativă a suprafețelor – mișcări definite anterior.

Fie suprafața elicoidală Σ , exprimată în sistemul XYZ , în forma:

$$\Sigma \begin{cases} X = X(u, v); \\ Y = Y(u, v); \\ Z = Z(u, v), \end{cases} \quad (5.2)$$

cu u și v – parametrii variabili independenți.

Se consideră planul

$$X = H \quad (5.3)$$

cu H – variabilă arbitrară, plan ortogonal axei X , vezi figura 1, cu

$$R_i \leq H \leq R_e. \quad (5.4)$$

Principial, intersecția planului (5.3) cu suprafața Σ , figura 5.2, este o curbă de forma:

$$(C_\Sigma)_H \begin{cases} X = H; \\ Y = Y(u); \\ Z = Z(u), \end{cases} \quad (5.5)$$

dacă se acceptă echivalența condiției (5.3) ca legătura dintre parametrii v și u ,

$$v = v(u). \quad (5.6)$$

Trajectoriile relative ale curbelor $(C_\Sigma)_H$, în raport cu viitoarea suprafață cilindrică S , în ansamblul de mișcări (*I*, *II*, *III*), pentru H – variabil, vor determina forma suprafeței periferice primare a sculei cilindrice.

Întrucât în ansamblul de mișcări (*I*, *II*), suprafața elicoidală Σ se autogenerază, așa cum este cunoscut, caracteristica suprafeței nu va depinde de acest ansamblu de mișcări, singura mișcare care va determina caracteristica suprafeței Σ este mișcarea de translație în lungul generatoarei \vec{t} a viitoarei scule cilindrice.

În acest fel, problema se simplifică substanțial reducându-se la a determina în fiecare plan $X = H$ (H – variabilă arbitrară) punctul de tangență al curbei $(C_\Sigma)_H$ (5.5) cu generatoarea viitoarei suprafețe S – directoarea suprafeței cilindrice de versor \vec{t} ,

$$\vec{t} = -\sin \alpha \cdot \vec{j} - \cos \alpha \cdot \vec{k} \quad (5.7)$$

Tangenta la curba $(C_\Sigma)_H$ se definește pornind de la ecuațiile (5.5). Fie $(\vec{T}_\Sigma)_H$ această tangență:

$$(\vec{T}_\Sigma)_H = -\dot{Z}_u \cdot \vec{j} + \dot{Y}_u \cdot \vec{k} \quad (5.8)$$

Din condiția ca cele două direcții, \vec{t} și $(\vec{T}_\Sigma)_H$, să fie identice, rezultă:

$$\begin{aligned} -\dot{Z}_u &= -\sin \alpha; \\ \dot{Y}_u &= -\cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.9)$$

de unde rezultă condiția pentru determinarea punctului de pe $(C_\Sigma)_H$ în care tangenta la aceasta este paralelă cu \vec{t} .

$$\tan \alpha = \frac{-\dot{Z}_u}{\dot{Y}_u} \quad (5.10)$$

Ansamblul ecuațiilor (5.5) și (5.10) reprezintă, în planul H , coordonatele punctului de tangență cu generatoarea viitoarei suprafețe cilindrice S .

Pentru H variabil, ansamblul ecuațiilor (5.5) și (5.9) reprezintă curba caracteristică – a suprafeței elicoidale Σ – curba de tangență a suprafeței elicoidale Σ cu scula cilindrică S .

În principiu, ecuațiile curbei caracteristice $C_{\Sigma,S}$ sunt de forma:

$$C_{\Sigma,S} \begin{cases} X = H; \\ Y = Y(u_H); \\ Z = Z(u_H), \end{cases} \quad (5.11)$$

pentru H – variabil și u_H – mărimea parametrului u care satisface, în fiecare plan $X = H$, condiția (5.10).

Modelul analitic al suprafeței cilindrice S se obține pornind de la ecuațiile (5.11), vezi figura 5.2, în forma:

$$S \begin{cases} X = H; \\ Y = Y(u_H) - \lambda \cdot \sin \alpha; \\ Z = Z(u_H) - \lambda \cdot \cos \alpha, \end{cases} \quad (5.12)$$

cu λ – parametru scalar variabil.

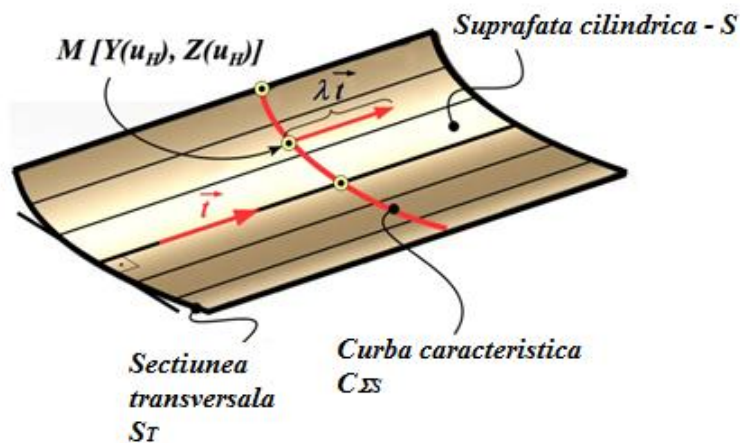


Fig. 5.2. Suprafața cilindrică S și secțiunea transversală S_T

Secțiunea transversală a suprafeței cilindrice se obține din (5.12) prin intersecția suprafeței S (5.12) cu planul

$$Z_1 = 0. \quad (5.13)$$

Pentru aceasta, este necesar a considera transformarea de coordonate

$$X_1 = \omega_1(\alpha) \cdot [X - a] \quad (5.14)$$

în care:

$$\omega_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

cu unghiul α definit de (5.1).

Din (5.12) și (5.14) rezultă forma suprafeței cilindrice în sistemul $X_1 Y_1 Z_1$:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} H \\ Y(u_H) - \lambda \cdot \sin \alpha \\ Z(u_H) - \lambda \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (5.16)$$

principal:

$$\begin{cases} X_1 = H - R_e; \\ Y_1 = Y_1(u_H, \lambda); \\ Z_1 = Z(u_H, \lambda). \end{cases} \quad (5.17)$$

din care, prin eliminarea parametrului λ din ecuația (5.13), rezultă forma secțiunii transversale:

$$\begin{cases} X_1 = H - R_e; \\ Y_1 = Y_1(u); \\ Z_1 = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Forma (5.18) permite trasarea șablonului (fizic sau virtual) pentru controlul formei muchiei de așchiere a cuțitului de rabotat care generează, în mișcarea rectilinie alternativă în direcția \vec{t} , suprafața cilindrică S , figura 5.3.

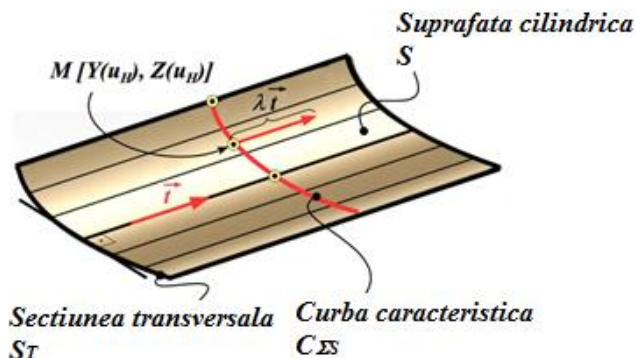


Fig. 5.3. Scula de rabotat (profilul sculei – secțiunea transversală a suprafeței cilindrice)

Metoda grafică în CATIA

O metodă grafică a fost dezvoltată în mediul de proiectare CATIA.

Algoritmul de profilare pentru scula de rabotat presupune realizarea modelului numeric 3D a suprafeței care trebuie generată și generarea sistemelor de referință: XYZ sistem de referință asociat suprafeței elicoidale Σ ; $X_1Y_1Z_1$ sistem de referință asociat cu suprafața cilindrică și xyz sistem de referință fix.

Ulterior, se generează un plan la cota $X = H$.

Intersectând (comanda *INTERSECTION*) acest plan cu suprafața elicoidală Σ se obține curba $(C_\Sigma)_H$. Unul dintre punctele acestei curbe va aparține și curbei caracteristice. Acest punct este punctul de tangență între curba $(C_\Sigma)_H$ și linia care are direcția dată de versorul \vec{t} .

Punctul este obținut trasând o linie paralelă cu versorul și aplicându-i restricția de a fi tangentă la curba de intersecție $(C_\Sigma)_H$ (restricția *TANGENCY*).

În acest mod se obține o serie de puncte aparținând curbei caracteristice. Curba caracteristică este determinată trasând o curbă spline care are drept puncte de control punctele anterior determinate.

Suprafața viitoare a sculei de rabotat este determinată aplicând comandă *SWEEP* prin care se generează o suprafață care are ca generatoare curba caracteristică și ca directoare direcția versorului \vec{t} .

Secțiunea transversală a sculei de rabotat este obținută intersectând suprafața sculei cu un plan perpendicular pe linia elicoidală.

1.2.2. Aplicații – Scula cilindrică (scula de rabotat) pentru un melc elicoidal de compresor Roots

Compresoarele Roots se pot realiza în construcții în care rotoarele sunt melci elicoidali de pas mare, cu profil frontal cicloidal, figura 5.4.

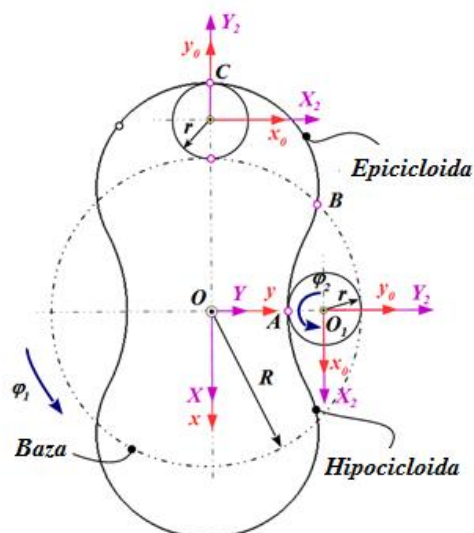


Fig. 5.4. Profilul frontal al melcului cicloidal

Profilul frontal al profilului cicloidal este un profil compus dintr-un ansamblu de curbe: epicicloidă, generată de un punct de pe ruleta de rază r , care se rostogolește fără alunecare pe baza de rază R (\widehat{CB}) și hipocicloidă de aceeași ruletă și bază (\widehat{BA}).

În sistemul X_1Y_1 , ecuația ruletei este de forma:

$$\begin{cases} X_2 = r \cdot \cos \theta; \\ Y_2 = r \cdot \sin \theta, \end{cases} \quad (5.19)$$

cu θ parametru variabil.

În procesul de rulare a ruletei de rază r , pe baza de rază R , fie φ_1 și φ_2 parametrii de mișcare care respectă condiția

$$R \cdot \varphi_1 = r \cdot \varphi_2. \quad (5.20)$$

Mișcările de generare, în raport cu sistemul fix xy sunt:

$$x = \omega_3^T(\varphi_1) \cdot X, \text{ rotația bazei;} \quad (5.21)$$

$$x_0 = \omega_3^T(\varphi_2) \cdot X_2, \text{ rotația ruletei} \quad (5.22)$$

dacă sistemul x_0y_0 este solidar centrului ruletei, legătura între sistemele xy – fix și x_0y_0 este:

$$x = x_0 - a; \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -(R-r) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Din (5.21), (5.22) și (5.23), rezultă:

$$\omega_3^T(\varphi_1) X = \omega_3^T(\varphi_2) X_2 - a \quad (5.24)$$

Rezultă profilul secțiunii AB – hipocicloida:

$$\widehat{AB} \begin{cases} X = r \cdot \cos(\varphi_2 + \theta - \varphi_1) + (R-r) \cdot \sin \varphi_1; \\ Y = r \cdot \sin(\varphi_2 + \theta - \varphi_1) + (R-r) \cdot \cos \varphi_1. \end{cases} \quad (5.25)$$

Ecuțiile (5.25) reprezintă profilul \widehat{AB} al rotorului pompei pentru arcul \widehat{AB} , pentru $\theta = -\frac{\pi}{2}$, adică

$$\widehat{AB} \begin{cases} X = r \cdot \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) + (R - r) \cdot \sin \varphi_1 \\ Y = r \cdot \sin\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) + (R - r) \cdot \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\widehat{AB} \begin{cases} X = r \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + (R - r) \cdot \sin \varphi_1; \\ Y = -r \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (R - r) \cdot \cos \varphi_1. \end{cases} \quad (5.27)$$

În mod curent $r = \frac{R}{4}$, deci:

$$\varphi_2 = \frac{R}{r} \cdot \varphi_1 = 4 \cdot \varphi_1 \quad (5.28)$$

În mod similar, se determină profilul arcului \widehat{CB} – epicicloida. Se modifică transformata (5.24) în forma:

$$\omega_3^T(\varphi_1) \cdot X = \omega_3^T(-\varphi_2) \cdot X_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ -(R+r) \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

de unde:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos \theta \\ r \cdot \sin \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -(R+r) \end{pmatrix} \right] = \quad (5.30)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi_2 - \theta) \\ -r \cdot \sin(\varphi_2 - \theta) + (R+r) \end{pmatrix}$$

$$\widehat{BC} \begin{cases} X = r \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \theta) + (R+r) \cdot \sin \varphi_1; \\ Y = -r \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \theta) + (R+r) \cdot \cos \varphi_1. \end{cases} \quad (5.31)$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ (punctul C de pe cercul de rază r), rezultă

$$\widehat{BC} \begin{cases} X = r \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + (R+r) \cdot \sin \varphi_1; \\ Y = r \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (R+r) \cdot \cos \varphi_1. \end{cases} \quad (5.32)$$

Ansamblul de arce cicloidale \widehat{AB} și \widehat{BC} formează semiprofilul frontal al rotorului de compresor.

Așa cum rezultă din (5.28),

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + 4 \cdot \varphi_1 = 5 \cdot \varphi_1 \quad (5.33)$$

Deci, ecuațiile semiprofilului frontal al melcului sunt de forma:

$$\widehat{AB} \begin{cases} X = r \cdot \sin(3 \cdot \varphi_1) + (R - r) \cdot \sin \varphi_1; \\ Y = -r \cdot \cos(3 \cdot \varphi_1) + (R - r) \cdot \cos \varphi_1, \end{cases} \quad (5.34)$$

respectiv

$$\widehat{BC} \begin{cases} X = r \cdot \sin(5 \cdot \varphi_1) + (R + r) \cdot \sin \varphi_1; \\ Y = r \cdot \cos(5 \cdot \varphi_1) + (R + r) \cdot \cos \varphi_1. \end{cases} \quad (5.35)$$

Pentru arcul de cicloidă \widehat{AB} , limita de variație a unghiului φ_1 se deduce din condiția

$$X^2 + Y^2 = R^2 \quad (5.36)$$

cu x și y din (5.34) și (5.35), adică

$$r^2 + (R - r)^2 - \sin(3 \cdot \varphi_1 + \varphi_1) = R^2 - 2 \cdot r \cdot (R - r) \quad (5.37)$$

$$-R^2 + r^2 + (R - r)^2 = (R - r) \cdot \sin(4 \cdot \varphi_1) \quad (5.38)$$

Rezultă:

$$\varphi_1 = \arcsin \left[\frac{(R - r)^2 + r^2 - R^2}{2 \cdot r \cdot (R - r)} \right] \quad (5.39)$$

Similar, se calculează și pentru \widehat{BC} .

În figura 3.4, sunt prezentate cele două semiprofiluri ale secțiunii frontale a rotorului. Evident, pentru simetrizare, se obține profilul frontal compus.

Flancul elicoidal al melcului se obține din (5.34) și (5.35), prin transformarea

$$X = \omega_3^T(\varphi) \cdot X_{AB,BC} + p \cdot \psi \cdot \vec{k}, \quad (5.40)$$

cu ψ parametru unghiular al mișcării elicoidale și p parametru elicoidal (melc dreapta).

Pentru un unghi de înclinare al elicei, pe diametrul pe diametrul exterior al melcului $R_{ex} = (R + r)$, de $\beta = 15^\circ$ parametrul elicoidal este

$$p = \frac{R + r}{\tan \beta} = \frac{R + r}{\tan 15^\circ}. \quad (5.41)$$

Astfel, semiflancurile elicoidale au ecuațiile – pentru flancul \widehat{AB}

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \sin(3 \cdot \varphi_1) + (R - r) \cdot \sin \varphi_1 \\ -r \cdot \cos(3 \cdot \varphi_1) + (R - r) \cdot \cos \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \cdot \psi \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

$$\Sigma_{AB} \begin{cases} X = r \cdot \sin(\psi + 3 \cdot \varphi_1) + (R - r) \cdot \sin(\psi + \varphi_1); \\ Y = r \cdot \cos(\psi + 5 \cdot \varphi_1) + (R - r) \cdot \cos(\psi + \varphi_1); \\ Z = p \cdot \psi, \end{cases} \quad (5.43)$$

și, similar, pentru flancul \widehat{BC}

$$\Sigma_{BC} \begin{cases} X = r \cdot \sin(\psi + 5 \cdot \varphi_1) + (R + r) \cdot \sin(\psi + \varphi_1); \\ Y = r \cdot \cos(\psi + 5 \cdot \varphi_1) + (R + r) \cdot \cos(\psi + \varphi_1); \\ Z = p \cdot \psi. \end{cases} \quad (5.44)$$

Conform algoritmului prezentat, se determină secțiunea plană cu un plan variabil perpendicular pe axa Y .

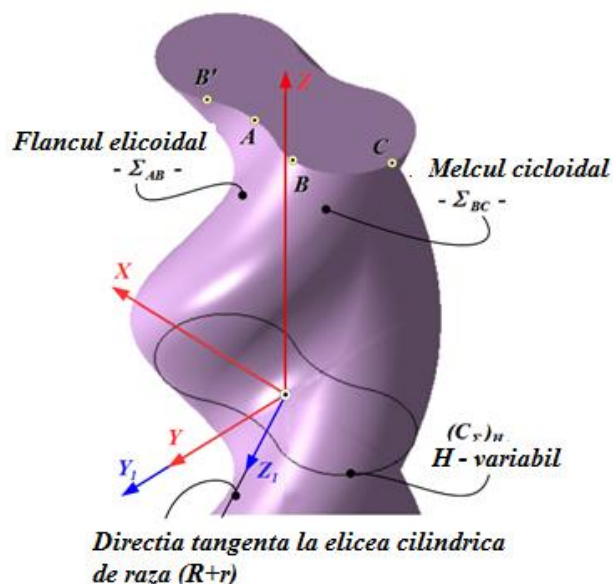


Fig. 5.5. Flancuri elicoidale, sisteme de referință

- Pentru flancul de generatoare $AB - \Sigma_{AB}$, vezi (5.43), se calculează secțiunea cu planul $Y=H$ (cu H - variabil)

$$-r \cdot \cos(\psi + 3 \cdot \varphi_1) - (R - r) \cdot \cos(\psi - \varphi_1) = H \quad (5.45)$$

Se determină o dependență numerică $\psi = \psi(\varphi_1)$ pentru limita de variație a unghiului φ_1 între limitele:

$$-\arcsin \left[\frac{(R-r)^2 + r^2 - R^2}{2 \cdot r \cdot (R-r)} \right] < \varphi_1 < \arcsin \left[\frac{(R-r)^2 + r^2 - R^2}{2 \cdot r \cdot (R-r)} \right] \quad (5.46)$$

pentru zona $\widehat{B'AB}$.

Soluția analitică urmează metodologia anterioară, dar este evidentă dificultatea manipulării pe care o implică forma suprafeței elicoidale.

Prin aplicarea metodei grafice dezvoltată în mediul de proiectare CATIA, a fost obținută secțiunea transversală a sculei de rabotat.

Coordonatele secțiunilor transversale corespunzătoare diverselor zone ale profilului sunt date în tabelul 3.1, iar forma profilului este prezentată în figura 5.6.

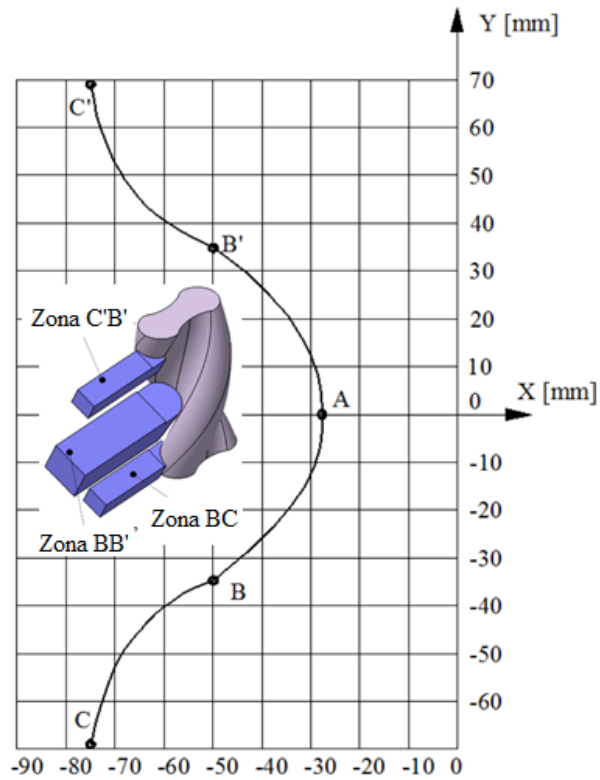


Fig. 5.6. Profilul sculei de rabotat

Tabelul4.1. Coordonatele punctelor de pe secțiunea transversală a sculei de rabotat

Crt. no.	C'B'		B'B		BC	
	X [mm]	Y [mm]	X [mm]	Y [mm]	X [mm]	Y [mm]
1	-74.990	69.008	-49.900	34.783	-50.000	-34.790
2	-73.616	59.329	-31.096	20.953	-55.765	-36.532
3	-68.925	48.623	-25.000	0	-66.985	-45.856
4	-60.613	39.602	-29.662	-18.506	-71.635	-53.857
5	-50.000	34.790	-49.900	-34.783	-74.990	-69.008

II. Sinteza unor metodici neanalitice pentru profilarea sculelor care generează prin înfășurare cu contact punctiform

Roțile dințate cu dantură evolventică se generează frecvent prin înfășurare prin metoda rulării cu scule de tip cremalieră (cuțit-pieptene), cuțite roată de mortezat, freză melc.

Profilarea constructivă a sculei melc presupune cunoașterea riguroasă a formei primare a melcului generator, ca fundament a construcției suprafeței active pe care se realizează dantura sculei așchietoare – freza melc.

Profilarea sculelor de tip melc se poate face în baza teoremelor fundamentale ale înfășurării suprafețelor, teoremele Olivier sau Gohmann, în particular în baza teoremei a II-a Olivier a suprafețelor în înfășurare cu contact punctiform, prin metoda suprafeței intermediare (ajutătoare) care este, în fapt, cremaliera conjugată vârtejului ordonat de profiluri ce reprezintă flancurile dinților unei roți dințate cu dinți drepți sau elicoidali.

Pentru profilul evolventic al vârtejului de suprafețe, la contactul cu o sculă de tip melc, s-au imaginat soluții pentru determinarea formei teoretice a melcului posibil chiar de către Euler, ulterior Kutzbach (1925), soluții date în baza teoremelor fundamentale Olivier.

S-a propus o rezolvare a acestui tip de problemă, dezvoltată în baza teoremei Gohmann prin metoda suprafeței intermediare.

Sunt cunoscute metode de generare a diferitelor tipuri de melci, precum a melcului arhimedic și evolventic cu scule care materializează o generatoare rectilinie sau pentru melcul desfășurabil, cu o suprafață plană (disc abraziv) modelând un plan tangent la o suprafață elicoidală.

De asemenea, se recomandă tehnici și soluții pentru generarea melcilor de tip K și F .

Pentru profilarea suprafeței periferice primare a melcului conjugat unei danturi evolventice s-au imaginat soluții și s-au creat algoritmi specializați în *Lisp* pentru *AutoCAD*.

De asemenea, s-au realizat aplicații în *CATIA* privind generarea suprafețelor elicoidale utilizând facilitățile deosebite oferite de acest mediu de proiectare grafică.

În lucrare, se propune o abordare analitică a determinării melcului conjugat unui vârtej ordonat de suprafețe cilindrice evolventice (roata dințată evolventică cu dinți drepți) în baza unei teoreme complementare a înfășurării suprafețelor – familia de traiectorii de generare [9]. Se urmărește a demonstra analitic că melcul conjugat danturii evolventice este, de asemenea, un melc evolventic.

2.1. Flancul evolventic al roții dințate

În figura 6.1, se prezintă profilul frontal al dintelui unei roți cu dantură evolventică, asociat unui sistem de referință XYZ , în care axa Z este suprapusă axei roții dințate. Totodată, este definit sistemul $\xi\eta\zeta$ asociat centroidei cremalierii înfășurătoare și sistemul fix xyz , peste care este suprapus, inițial, sistemul XYZ .

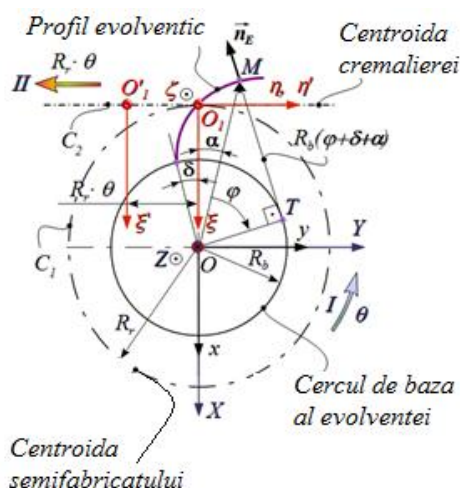


Fig. 6.1. Profilul evolventic, centroide în rulare, C_1 și C_2 ; cinematica procesului de rulare; I – rotația roții; II – translația cremalierii

Evolventa cercului de rază R_b , figura 6.1, este definită de ecuația vectorială

$$\overline{OM} = \overline{OT} + \overline{TM} \quad (6.1)$$

în care:

$$\overline{OT} = -R_b \cos(\alpha + \varphi) \vec{i} + R_b \sin(\alpha + \varphi) \vec{j}; \quad (6.2)$$

$$\overline{TM} = -R_b \varphi \sin(\alpha + \delta + \varphi) \vec{i} + R_b \cos(\alpha + \delta + \varphi) \vec{j}, \quad (6.3)$$

cu φ parametru variabil, iar α și δ – constante geometrice.

Astfel, ecuațiile evolventei, ecuațiile Euler, sunt definite ca fiind:

$$(E) \begin{cases} X = -R_b \cos(\alpha + \varphi) - R_b \sin(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi); \\ Y = R_b \sin(\alpha + \varphi) - R_b \sin(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi). \end{cases} \quad (6.4)$$

Cele două constante δ și α se deduc din ecuațiile:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R_b^2; \\ x^2 + y^2 = R_r^2, \end{cases} \quad (6.5)$$

$R_b = R_r \cos \alpha$ (α – normalizat; curent $\alpha = 20^\circ$), iar R_r – raza centroidei C_1 .

Cinematica procesului de rulare a celor două centroide include mișcările:

- rotația centroidei C_1 și, odată cu aceasta, a sistemului XYZ în jurul axei z a sistemului de referință fix,

$$x = \omega_3^T(\theta) \cdot X, \quad (6.6)$$

cu θ – parametrul unghiular de rotație;

- translația centroidei C_2 , în direcția axei η :

$$x = \xi + a; \quad a = \begin{vmatrix} -R_r \\ -R_r \cdot \theta \end{vmatrix}. \quad (6.7)$$

Astfel, mișcarea relativă a sistemului XYZ față de $\xi\eta\zeta$ din (6.6) și (6.7), rezultă în forma:

$$\xi = \omega_3^T(\theta) \cdot X + \left\| \begin{matrix} R_r \\ R_r \theta \end{matrix} \right\|, \quad (6.8)$$

sau, dezvoltat,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R_b \cos(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi) \\ R_b \sin(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ R_r \theta \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned} \xi &= [-R_b \cos(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi)] \cos \theta - \\ &\quad - [R_b \sin(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi)] \sin \theta + R_r; \\ \eta &= [-R_b \cos(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi)] \sin \theta + \\ &\quad + [R_b \sin(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi)] \cos \theta + R_r \theta. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Familia de evolvente, în sistemul $\xi\eta$ (6.10), poate fi constrânsă în forma:

$$(E)_\theta \begin{cases} \xi = -R_b \cos(\alpha + \varphi - \theta) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi - \theta) + R_r; \\ \eta = R_b \sin(\alpha + \varphi - \theta) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi - \theta) + R_r \theta. \end{cases} \quad (6.11)$$

Înfășurătoarea familiei de evolvente (6.11) reprezintă profilul din planul $\xi\eta$ al cremalierii generatoare a vârtejului de evolvente al flancurilor dinților roții dințate de rază R_b .

2.2. Cremaliera reciproc înfășurătoare familiei de evolvente

Se propune determinarea condiției de înfășurare prin metoda „familiei de traiectorii de generare”.

În acest sens, se definesc parametrii directori ai normalei la evolventă (versorul vectorului \overline{TM} , vezi figura 6.1), notat cu \vec{n}_E :

$$\vec{n}_E = -\sin(\alpha + \varphi) \vec{i} - \cos(\alpha + \varphi) \vec{j}. \quad (6.12)$$

Dreapta suport a normalei la evolventa (6.4) poate fi scrisă în forma:

$$(N_E) \begin{cases} X = -R_b \cos(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi) - \lambda_N \sin(\alpha + \varphi); \\ Y = R_b \sin(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) - \lambda_N \cos(\alpha + \varphi), \end{cases} \quad (6.13)$$

cu λ_N – scalar variabil.

Se poate defini familia de traiectorii a normalei (6.13) în mișcarea de generare (6.8), prin transformarea:

$$(N_E)_\theta \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R_b \cos(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi) - \lambda_N \sin(\alpha + \varphi) \\ R_b \sin(\alpha + \varphi) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) - \lambda_N \cos(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ R_r \theta \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

sau, dezvoltat:

$$(N_E) \begin{cases} \xi = -R_b \cos(\alpha + \varphi - \theta) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi - \theta) - \lambda_N \sin(\alpha + \varphi - \theta) + R_r; \\ \eta = R_b \sin(\alpha + \varphi - \theta) - R_b(\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi - \theta) - \lambda_N \cos(\alpha + \varphi - \theta) + R_r \theta. \end{cases} \quad (6.15)$$

În procesul rulării centroidelor, familia normalelor la profilul evolventic (6.15) trebuie să treacă prin polul angrenării:

$$P \begin{cases} \xi = 0; \\ \eta = R_r \theta. \end{cases} \quad (6.16)$$

Din condițiile ca ecuațiile (6.15) să verifice condițiile (6.16), se obține un sistem de ecuații din care se elimină parametrul λ :

$$\begin{aligned} \lambda_N &= \frac{-R_b \cos(\alpha + \varphi - \theta) - R_b (\alpha + \delta + \varphi) \sin(\alpha + \varphi - \theta) + R_r}{\sin(\alpha + \varphi - \theta)}; \\ \lambda_N &= \frac{R_b \sin(\alpha + \varphi - \theta) - R_b (\alpha + \delta + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) + R_r \theta - R_r \theta}{\cos(\alpha + \varphi - \theta)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Din egalarea celor două ecuații, rezultă condiția specifică de înfășurare:

$$\varphi = \theta. \quad (6.18)$$

Astfel, din reuniunea ecuațiilor reprezentând familia de evolvente (6.11) cu această condiție de înfășurare (6.18) rezultă ecuațiile parametrice ale profilului cremalierii S conjugată roții dințate evolventice:

$$S \begin{cases} \xi = -R_b \cos \alpha - R_b (\alpha + \delta + \varphi) \sin \alpha + R_r; \\ \eta = R \sin \alpha - R_b (\alpha + \delta + \varphi) \cos \alpha + R_r \theta. \end{cases} \quad (6.19)$$

Dacă se ține seama de prima ecuație (6.15), se obține dependentă cunoscută

$$\delta = tg \alpha - \alpha \quad (6.20)$$

astfel că ecuațiile (6.19) pot fi reduse la formele:

$$P_s \begin{cases} \xi = -R_b \varphi \sin \alpha \cos \alpha; \\ \eta = R_b \varphi \sin \alpha \sin \alpha, \end{cases} \quad (6.21)$$

care, cu notația

$$u = R_b \varphi \sin \alpha, \quad (6.22)$$

pot fi descrise de ecuațiile:

$$P_s \begin{cases} \xi = -u \cos \alpha; \\ \eta = u \sin \alpha, \end{cases} \quad (6.23)$$

reprezentând profilul în planul $\xi\eta$ al cremalierii generatoare.

Dacă se acceptă că ecuațiile flancului evolventic este o suprafață cilindrică de profil frontal (6.4) și cu o generatoare paralelă cu axa Z , cazul roții dințate cu dinți drepecți, având ecuația generatoarei

$$Z = t \quad (t - \text{variabilă}), \quad (6.24)$$

atunci, ecuațiile cremalierii generatoare are ecuațiile:

$$S \begin{cases} \xi = -u \cos \alpha; \\ \eta = u \sin \alpha; \\ \zeta = t, \end{cases} \quad (6.25)$$

cu φ și t parametri variabili, vezi figura 2.

Ecuțiile (6.25) reprezintă principial o suprafață cilindrică cu generatoare paralele cu axa ζ . Suprafața „cilindrică” se reduce, în acest caz, la un plan paralel cu axa ζ .

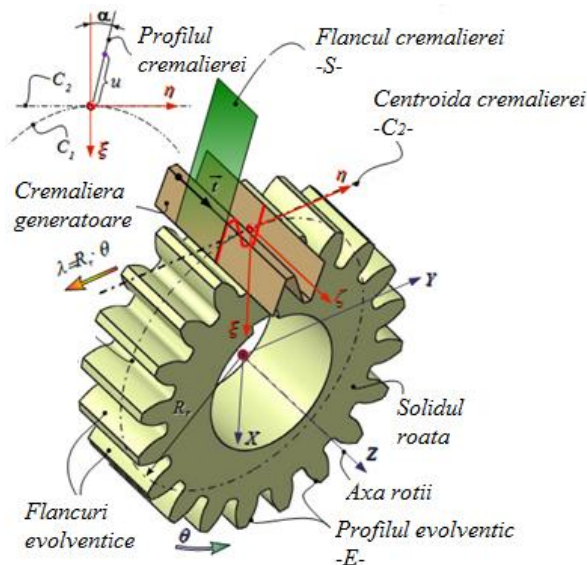


Fig. 6.2. Flancul cremalierii – planul S , reciproc înfășurător flancurilor evolventice; Sisteme de referință; Cinematica generării

2.3. Profilarea analitică a sculei melc

Scula melc, reciproc înfășurătoare a suprafețelor reprezentând flancurile roții dințate evolventice, acceptă ca suprafață periferică primară o suprafață elicoidală cilindrică și de pas constant, care admite un punct de contact (punct caracteristic) cu flancul cilindric evolventic în planul frontal al dintelui roții dințate – constituind un cuplu de suprafețe în înfășurare de speța a II-a Olivier.

Se propune, în cele ce urmează, determinarea formei melcului conjugat (suprafața periferică primară a sculei melc) utilizând metoda complementară a “trajectoriilor relative de generare”.

Metoda este aplicată, în forma analitică, utilizând principiul suprafeței intermediare (cremaliera generatoare) – în contact liniar cu flancul cilindric evolventic al dintelui roții dințate – caracteristica roată cremalieră. Totodată, se profilează suprafața elicoidală a sculei-melc ca reciproc înfășurătoare cu contact liniar cu flancul cremalierii generatoare (caracteristica cremalieră melc).

Cele două curbe caracteristice se află simultan pe suprafața cremalierii. Punctul instantaneu de intersecție a acestora reprezintă punctul caracteristic – punctul cu care scula melc generează flancul neevolventic al roții dințate.

În figura 6.3, sunt prezentate sistemele de referință ale semifabricatului (roata dințată evolventică) al cremalierii generatoare și al viitoarei scule melc.

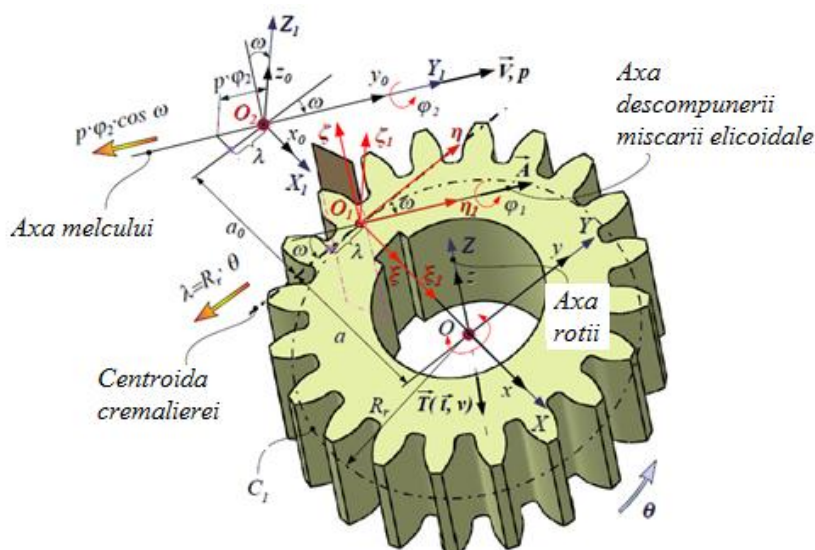


Fig. 6.3. Sisteme de referință – cinematica generării

Se definesc:

xyz este sistemul de referință fix cu axa z suprapusă roții dințate (z);

$x_0y_0z_0$ – sistem de referință ajutor (fix) solidar cu axa viitoare a sculei melc (y_0 – axa sculei melc);

XYZ – sistem mobil solidar cu flancul evolventic al roții dințate (inițial, suprapus sistemului xyz);

$\xi\eta\zeta$ – sistem mobil, solidar centroidei asociată sculei cremalieră, având axele paralele cu xyz ; axa η este suprapusă centroidei C_2 a cremalierii;

$\xi_1\eta_1\zeta_1$ – sistem mobil, solidar axei \bar{A} rezultă din descompunerea mișcării elicoidale (elicoidul melcului – \bar{V}, p de axă \bar{V} și parametru elicoidal p);

$X_1Y_1Z_1$ – sistem mobil, solidar cu melcul reprezentând suprafața periferică primară a sculei melc, înfășurătoare a flancului evolventic al roții dințate.

Se consideră că mișcarea de generare a melcului – suprafața periferică primară a viitoare a sculei melc (\bar{V}, p) se descompune în două mișcări componente:

- translație în lungul generatoarei suprafeței cremalierii, de direcție \bar{t}_0 paralelă cu axa semifabricatului – axa $Z - \bar{t}(\bar{t}, v)$, cu v parametrul de mișcare în lungul vectorului \bar{t} ;

- rotație în jurul unei axe \bar{A} paralelă cu axa \bar{V} a sculei melc și aflată la distanța a_0 de aceasta (vezi figura 6.4)

$$a_0 = ptg\theta. \quad (6.26)$$

Deci, descompunerea mișcării elicoidale poate fi reprezentată simbolic, astfel:

$$(\bar{V}, p) \sim T(\bar{t}, v) + (\bar{A}, \omega_A). \quad (6.27)$$

Flancul melcului generator rezultă ca înfășurătoare a suprafeței cremalierii generatoare (6.24) în mișcarea elicoidală (\bar{V}, p) sau în ansamblul de mișcări în care aceasta se descompune – rotație de axă \bar{A} și translație în lungul generatoarelor de versor \bar{t} , vezi figura 6.2.

Facem observația că, în mișcarea $\bar{T}(\bar{t}, v)$, cremaliera generatoare se autogenerază. Ca urmare, caracteristica suprafeței (6.25) nu va depinde de această componentă a

mișcării, ci numai de mișcarea de rotație în jurul axei \vec{A} . O astfel de abordare a problemei, reduce substanțial efortul de calcul, simplificând problema determinării caracteristicii de contact între suprafața cremalierii și melcul ce constituie suprafața periferică primară a sculei melc.

Cinematica procesului de generare include mișcările:

- mișcarea de translație a cremalierii:

$$x = \xi + a; a = \begin{pmatrix} -R_r \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

- rotația melcului (scula melc) în jurul axei \vec{V} – axa Y_1 :

$$x_0 = \omega_2^T(\varphi_2) \cdot X_1 \quad (6.29)$$

- poziția relativă a sistemelor de referință fixe:

$$x_0 = \beta(x - a_0); a_0 = \begin{pmatrix} -R_r - a_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

- mișcarea relativă între sistemele de referință mobile (mișcarea relativă a cremalierii în raport cu sistemul asociat sculei melc):

$$X_1 = \omega_2(\varphi_2) \cdot \beta(\xi + a - a_0), \quad (6.31)$$

în care:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

$$\omega_2(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

și

$$\lambda = p\varphi_2 \cos \omega \text{ (vezi (6.29) și figura 6.3)} \quad (6.34)$$

ω – unghiul de înclinare a axei \vec{V} față de planul frontal al roții evolventice.

Astfel, se deduce forma matriceală a familiei de suprafețe generată de flancul cremalierii în raport cu sistemul sculei melc:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -u \cos \alpha \\ u \sin \alpha \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ -p\varphi_2 \cos \omega \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (6.35)$$

După dezvoltări, rezultă ecuațiile parametrice ale familiei de suprafețe ale cremalierii în mișcarea în raport cu axa \vec{V} (mișcare elicoidală de parametru elicoidal p):

$$(S)_{\varphi_2} \begin{cases} X_1 = [-u \cos \alpha + a_0] \cos \varphi_2 - t \sin \varphi_2 \cos \omega - [u \sin \alpha - p \varphi_2 \cos \omega] \sin \omega \sin \varphi_2; \\ Y_1 = [-p \varphi_2 \cos \omega + u \sin \alpha] - t \sin \omega; \\ Z_1 = [-u \cos \alpha + a_0] \sin \varphi_2 + t \cos \varphi_2 \cos \omega + [u \sin \alpha - p \varphi_2 \cos \omega] \cos \omega \cos \varphi_2. \end{cases} \quad (6.36)$$

Facem observația că translația sistemului $\xi\eta\zeta$ (solidar cremalierii), λ , se definește în corelație cu translația în mișcarea elicoidală în lungul axei \vec{V} :

$$\lambda = p \cdot \varphi_2 \cdot \cos \omega. \quad (6.37)$$

Înfășurătoarea familiei de suprafețe $(S)_{\varphi_2}$ în raport cu sistemul de referință al suprafeței elicoidale (scula melc) reprezintă suprafața periferică primară a viitoarei scule melc.

Înfășurătoarea familiei $(S)_{\varphi_2}$ (6.36) se determină în baza teoremei complementare a traiectoriilor de generare.

Se calculează versorul normalei la suprafața S – flancul cremalierii din (6.25)

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \quad (6.38)$$

și, astfel, se poate determina dreapta suport a normalei la S, în punctul curent al suprafeței, (6.26) și (6.38):

$$\vec{N}_S \begin{cases} \xi = -u \cos \alpha + k \sin \alpha; \\ \eta = u \sin \alpha + k \cos \alpha; \\ \zeta = t, \end{cases} \quad (6.39)$$

în care k este un scalar variabil.

Axa \vec{A} este paralelă cu axa \vec{V} și aflată la distanța a_0 de aceasta (a_0 se măsoară în lungul axei $x \equiv x_0$), vezi figura 6.3.

Se raportează ecuațiile normalei \vec{N}_S (6.39) la sistemul de referință $\xi_1\eta_1\zeta_1$, asociat axei \vec{A} și având axele paralele cu $X_1Y_1Z_1$, prin transformările:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Din (6.39) și (6.40), rezultă forma normalei \vec{N}_S în sistemul $\xi_1\eta_1\zeta_1$ cu axa η_1 suprapusă axei \vec{A} (figura 6.3):

$$[\vec{N}_S]_{\xi_1\eta_1\zeta_1} \begin{cases} \xi_1 = -u \cos \alpha + k \sin \alpha; \\ \eta_1 = [u \sin \alpha + k \cos \alpha] \cos \omega - t \sin \omega; \\ \zeta_1 = [u \sin \alpha + k \cos \alpha] \sin \omega - t \cos \omega. \end{cases} \quad (6.41)$$

Prin rotirea normalei $[\vec{N}_S]_{\xi_1\eta_1\zeta_1}$ exprimată în sistemul $\xi_1\eta_1\zeta_1$ în jurul axei \vec{A} , axa η_1 , de unghi φ_1 :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \cos \alpha + k \sin \alpha \\ [u \sin \alpha + k \cos \alpha] \cos \omega - t \sin \omega \\ [u \sin \alpha + k \cos \alpha] \sin \omega - t \cos \omega \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

se determină familia normalelor la flancul cremalierii \vec{N}_s în sistemul $\xi_I \eta_I \zeta_I$:

$$(N_s)_{\varphi_1} \begin{cases} \xi_1 = (-u \cos \alpha + k \sin \alpha) \cos \varphi_1 - \{[u \sin \alpha + k \cos \alpha] \sin \omega + t \cos \omega\} \sin \varphi_1; \\ \eta_1 = (u \sin \alpha + k \cos \alpha) \cos \omega - t \sin \omega; \\ \zeta_1 = (-u \cos \alpha + k \sin \alpha) \sin \varphi_1 + \{[u \sin \alpha + k \cos \alpha] \sin \omega + t \cos \omega\} \cos \varphi_1. \end{cases} \quad (6.43)$$

Conform metodei complementare a traiectoriilor de generare [9], se impune condiția ca familia normalelor $(N_s)_{\varphi_1}$ să intersecteze axa \vec{A} , care în sistemul $\xi_I \eta_I \zeta_I$ are ecuațiile:

$$A \begin{cases} \xi_1 = 0; \\ \zeta_1 = 0. \end{cases} \quad (6.44)$$

Dacă se elimină parametrul k din ansamblul de ecuații (6.43)-(6.44), se determină condiția specifică de înfășurare. Din egalarea coordonatei ξ_1 din (6.43) și (6.44), rezultă:

$$k = \frac{-u \cos \alpha \cos \varphi_1 - u \sin \alpha \sin \omega \sin \varphi_1 - t \cos \omega \sin \varphi_1}{-u \sin \alpha \cos \varphi_1 + \cos \alpha \sin \omega \sin \varphi_1} \quad (6.45)$$

și, similar, pentru ζ_1 :

$$k = \frac{-u \cos \alpha \sin \varphi_1 + u \sin \alpha \sin \omega \cos \varphi_1 - t \cos \omega \cos \varphi_1}{-\sin \alpha \sin \varphi_1 - \cos \alpha \sin \omega \cos \varphi_1}. \quad (6.46)$$

Din egalarea ecuațiilor (6.45) și (6.46), rezultă condiția

$$t = -u \frac{tg \omega}{\sin \alpha}, \quad (6.47)$$

reprezentând condiția specifică de înfășurare, care asociată familiei de flancuri ale cremalierii, în mișcarea relativă față de sistemul $X_I Y_I Z_I$ (6.36) determină suprafața periferică primară, elicoidală, a viitoarei scule melc:

$$\Sigma \begin{cases} X_1 = [-u \cos \alpha + a_0] \cos \varphi_2 + \frac{utg \omega}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi_2 \cos \omega - [u \sin \alpha - p \varphi_2 \cos \omega] \sin \omega \sin \varphi_2; \\ Y_1 = [-p \varphi_2 \cos \omega + u \sin \alpha] \cos \omega + \frac{utg \omega}{\sin \alpha} \cdot \sin \omega; \\ Z_1 = [-u \cos \alpha + a_0] \sin \varphi_2 + [u \sin \alpha - p \varphi_2] \sin \omega \cos \varphi_2 - \frac{utg \omega}{\sin \alpha} \cdot \cos \omega \cos \varphi_2. \end{cases} \quad (6.48)$$

Ecuațiile (6.48) reprezintă o suprafață elicoidală cilindrică de axa Y_I și parametru elicoidal p .

2.4. Forma suprafeței elicoidale a sculei melc

Se analizează forma melcului primar al sculei melc reciproc înfășurătoare unui vârtej de suprafațe cilindrice cu profil evolventic în plan frontal (roată dințată evolventică cu dinți drepi).

Din (6.48), pentru

$$\varphi_2 = 0, \quad (6.49)$$

se determină generatoarea suprafeței elicoidale:

$$G \begin{cases} X_1 = -u \cos \alpha + a; \\ Y_1 = u \sin \alpha \cos \omega + u \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \alpha} \sin \omega; \\ Z_1 = u \sin \alpha \sin \omega - u \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \alpha} \cos \omega, \end{cases} \quad (6.50)$$

reprezentând o dreaptă pentru care se pot defini parametrii directori:

$$G \begin{cases} l_1 = -\cos \alpha; \\ m_1 = \sin \alpha \cos \omega + \frac{\sin^2 \omega}{\sin \alpha \cos \omega}; \\ n_1 = \sin \alpha \sin \omega + \frac{\sin \omega}{\sin \alpha}. \end{cases} \quad (6.51)$$

Se definesc, totodată, parametrii directori ai axei $\vec{V} = \vec{j}$ în sistemul de referință $X_1 Y_1 Z_1$:

$$V \begin{cases} l_2 = 0; \\ m_2 = 1; \\ n_2 = 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Se examinează poziția relativă a celor două drepte \vec{V} și \vec{G} . Distanța minimă între cele două drepte se poate calcula în forma vectorială (figura 4), ca fiind:

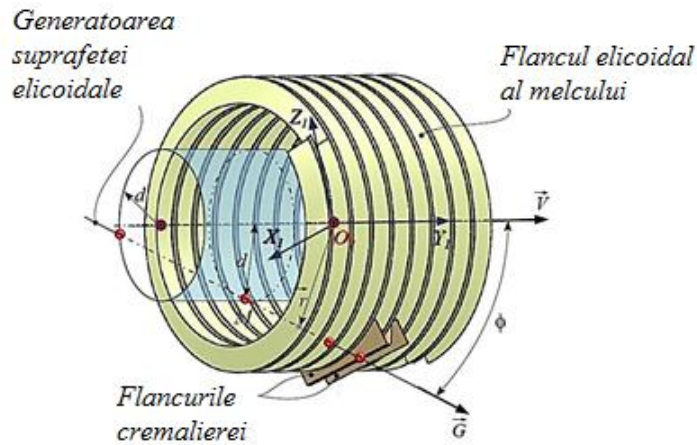


Fig. 6.4. Unghiul dreptelor G și V și distanța minimă

Unghiul direcțiilor \vec{G} și \vec{V} se definește ca fiind

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\|\vec{G} \times \vec{V}\|}{\vec{G} \cdot \vec{V}}. \quad (6.53)$$

Se calculează produsul $\vec{G} \times \vec{V}$,

$$\vec{G} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos \alpha & \left[\sin \alpha \cos \omega + \frac{\sin^2 \omega}{\sin \alpha \cos \omega} \right] & \left[\sin \alpha \sin \omega - \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right] \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (6.54)$$

sau

$$\vec{G} \times \vec{V} = - \left[\sin \alpha \sin \omega - \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right] \vec{i} - \cos \alpha \vec{k}. \quad (6.55)$$

Modulul produsului vectorial $\|\vec{G} \times \vec{V}\|$ este dat de:

$$\|\vec{G} \times \vec{V}\| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \left[\sin \alpha \sin \omega - \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right]^2}. \quad (6.56)$$

Se calculează, de asemenea, produsul scalar

$$\vec{G} \cdot \vec{V} = \left[\sin \alpha \cos \omega + \frac{\sin^2 \omega}{\sin \alpha \cos \omega} \right]. \quad (6.57)$$

Astfel, din (6.53) și definițiile modulului produsului vectorial (6.56) și scalar (6.57), rezultă definiția unghiului dreptelor G și V :

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \left[\sin \alpha \sin \omega - \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right]^2}}{\sin \alpha \cos \omega + \frac{\sin^2 \omega}{\sin \alpha \cos \omega}}. \quad (6.58)$$

Distanța între cele două drepte este definită de ecuația

$$d = \frac{\Delta}{\|\vec{G} - \vec{V}\|}, \quad (6.59)$$

în care Δ este produsul mixt $(\vec{r}, \vec{G}, \vec{V})$ sau

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & \left[\sin \alpha \cos \omega + \frac{\sin^2 \omega}{\sin \alpha \cos \omega} \right] & \left[\sin \alpha \sin \omega + \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right] \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (6.60)$$

$$\Delta = a \left[\sin \alpha \sin \omega - \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right] \quad (6.61)$$

\vec{r} – vectorul care unește două puncte aparținând dreptelor \vec{G} și \vec{V} , vezi figura 4:

$$\vec{r} = a \vec{i}. \quad (6.62)$$

Deci, distanța minimă între cele două drepte \vec{G} și \vec{V} este

$$d = \frac{a \left[\sin \alpha \sin \omega - \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \right]}{\sin \alpha \cos \omega - \frac{\sin^2 \omega}{\sin \alpha \cos \omega}}. \quad (6.63)$$

Facem observația că distanța minimă (6.63) reprezintă raza cilindrului coaxial dreptei \vec{V} la care este tangentă generatoarea rectilinie a suprafeței elicoidale Σ (6.48), vezi și figura principală 6.5.

Expresiile (6.58) și (6.63) pot fi prelucrate, vezi Apendix 1, astfel încât rezultă, din (6.58),

$$tg \Phi = \frac{\cos \omega}{\sqrt{tg^2 \alpha + \sin^2 \omega}}. \quad (6.64)$$

De asemenea, din (6.63), vezi figura 6,

$$d = \frac{p \cos \omega}{\sqrt{tg^2 \alpha + \sin^2 \omega}}. \quad (6.65)$$

Din (6.65), rezultă

$$\frac{d}{p} = \frac{\cos \omega}{\sqrt{tg^2 \alpha + \sin^2 \omega}} = tg \theta, \quad (6.66)$$

vezi figura 6.

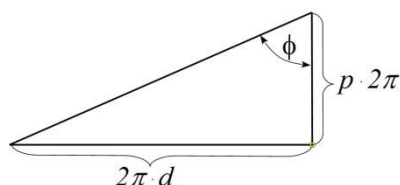


Fig. 6.5. Desfășurata elicei de parametru p pe cilindrul de rază d

Este evident că

$$\theta = \Phi, \quad (6.67)$$

deci, dreapta G este tangentă la elicea melcului de pe cilindrul de rază d coaxial axei \vec{V} .

Deci, melcul conjugat roții dințate evolventice este un melc evolventic.

2.5. Concluzii

Metoda complementară a traiectoriilor de generare demonstrează că melcul conjugat unei roți dințate cu dinți drepecți, este o suprafață elicoidală cilindrică de pas constant, un melc evolventic.

Melcul evolventic este un melc riglat, care admite ca generatoare o dreaptă tangentă la elicea de rază R_r a frezei melc. Aplicația demonstrează că generatoarea melcului este la distanță d față de axa frezei melc și la unghi Φ față de această axă, vezi (6.62). Unghiul Φ reprezintă unghiul elicei de pe cilindrul cu raza R_r , condiție care definește melcul evolventic. Prin urmare, singura suprafață elicoidală reciproc înfășurătoare cu o roată dințată evolventică este un melc evolventic, ce poate fi acceptat ca suprafață periferică primară a unei freze melc generatoare. O freză melc riguros profilată poate fi realizată numai dacă muchiile așchietoare ale dinților sunt curbe aparținând melcului evolventic.

Bibliografie

1. Baicu I. and al., *Modeling of Surfaces Generation*, Analele Universității “Dunărea de Jos” din Galați, Fasc. V, ISSM, 1221-4566, anul XX(XXV), 2002, p.p.48-53;
2. Baicu, I., *Cercetări privind utilizarea modelării 3D pentru algoritimizarea profilării sculelor așchietoare*, Teză de doctorat, Universitatea Dunărea de Jos din Galați, 2002;
3. Baicu, I., Oancea, N., *Profilarea sculelor prin modelare solidă*, Ed. Tehnica - Info, Chișinău, ISBN 9975-3-172-X, 2002;
4. Baroiu, N., Teodor, V., Oancea, N., *A new form of plane trajectories theorem. Generation with rotary cutters*, Buletinul Institutului Politehnic Iasi, Tom LXI (LXV), Construcții de mașini, 2015, pp. 27-36, ISBN 1011-2855;
5. Berbinschi S. and al., *A Graphical Method Developed in CATIA Desing Enviroment for the Modeling of Generation by Enveloping*, The Annals of “Dunărea de Jos”, University of Galați, Fas.V, vol.I, 2001, pp.25-30, ISSM 1221-4566;
6. Berbinschi S. et al., *3D Graphical Method for Profiling Tools that Generate Helical Surfaces*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, DOI: 10.1007/s00170-011-3637-3, vol. 60, p. 505-512, 2012;
7. Berbinschi, S., Teodor, V., Baroiu, N., Oancea, N., *Enwrapping Surfaces with Point Contact - Comparisson Between CATIA Method and Analytical One*, The Annals of “Dunărea de Jos” University of Galați, Fascicle V, Volume II, pp. 117-122, ISSN 1221-4566, 2011;
8. Dimitriou, V., Antoniadis, A., *CAD-based simulation of the hobbing process for the manufacturing of spur and helical gears*, Springer-Verlag, London Limited, 2008, DOI: 10.1007/s00170-008-1465-x, pp. 347-357;
9. Gouchao Li, Jie Sun, Jianfeng Li, *Process modeling of end mill groove machining based on Boolean method*, International Journal of Advanced Manufacturing Technology (2014) 75, p. 959-966, 2014, doi: 10.1007/s00170-14-6187-7;
10. Ivanov, V., Nankov, G., Kirov, V., *CAD orientated mathematical model for determination of profile helical surfaces*, International Journal of Machine Tools and Manufacturing, vol. 38, Issue 8, 1999, pp 1001-1015;
11. Ivanov, V., Nankov, G., *Profiling of Rotation Tools for Forming of Helical Surfaces*, International Journal of Machine Tools and Manufacture, Elsevier Science, Pergamon, vol. 38, M9, 1998, pp 1125-1148;
12. Kiryutin, A.S., *Mathematical Model of Profiling Cutter Tools*, Moskow State Technological University “STANKIN”, Nauchno-prakticheokoi Journal “Sovremenoe naychnoe issledovania i inovatzii”, ISSN 2223-4888; Scientific and Practical Journal “Modern scientific Researches and Innovations”, 2014, no. 10, URL: <http://web.snauka/en/issues/2014/10/38627>;
13. Litvin, F.L., Fuentes, A., Fan, Q., Handschuh, R.F., *Simulation of Meshing and Contact and Stress Analysis of Face – Milled Formate Generated Spiral Bevel Gears*, Mechanism and Machine Theory, 37, pp. 441–459, 2002;
14. Litvin, F.L., Ignacio, G.P., Alfonso F., *Generalized concept of meshing andcontact of involute crossed helical gears and its application*, Elsevier Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 194, pp. 3710–3745, 2005;
15. Litvin, F.L., *Theory of Gearing, Reference Publication 1212 NASA*, Scientific and Technical Information Division, Washington D.C., 1984;
16. Oancea, N., *Generarea suprafețelor prin înfășurare (Surfaces generation by winding)*, Vol. I-III, Galați University Press, 2004, ISBN 973-627-170-4, ISBN 973-627-107-2 (vol I), ISBN 973-627-176-6 (vol II), ISBN 973-627-239-7 (vol III);

17. Petukhov, Yu. E., Domnin, P. V., Shaping in Machining a Screw Surfaces, Russian Engineering Research, 2011, vol. 31, no. 10, pp. 1013-1015, DOI: 10.3103/s1068798x111100200;
18. Petukhov, Yu. E., Movsesyan, A.V., Determining of Shape of the Back Surface of Disc Milling Cutter for Machining a Contoured Surface, Russian Engineering Research, 2007, vol. 22, no. 8, pp. 519-521, DOI: 10.3103/s1068798x07080084;
19. Radzevich, S.P., *Kinematics Geometry of Surface Machining*, CRC Press, London, 2008, ISBN 978-1-4200-6340-0;
20. Semencenko, I.I., Matiușin, V.M., Saharov, G.N., *Proektirovanie metallorejuschih instrumentov, Gosudarstvenno enaucino-tehnicescoe izdatelistvo mașinostroitelinoi literaturî*, Moskva, 1962;
21. Semencenko, I.I., *Proektirovanie metalorejunschih instrumentov*, Mashghiz, Moskva, 1962;
22. Teodor V., *Contribution to the Elaboration of a Method for Profiling Tools. Tools which Generate by Enwrapping*, Lambert Academic Publishing, ISBN 978-3-8433-8261-8, 2010.